

## 1 Optimisation sans contraintes

### Exercice 1 Calcul différentiel. (★)

1. Calculez les dérivées partielles par rapport à  $x$  et à  $y$  de la fonction  $f : x, y \mapsto x^2y$  de  $\mathbf{R}^2$  vers  $\mathbf{R}$ .

**Solution :** Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : x, y \mapsto 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : x, y \mapsto x^2$$

2. Utilisez la règle donnant le Jacobien d'une fonction composée pour calculer le gradient de la fonction  $x \mapsto \|x\|_2$  de  $\mathbf{R}^n$  vers  $\mathbf{R}$ .

**Solution :** La norme  $\|x\|_2$  est donnée par :  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Nous pouvons écrire  $\|x\|_2$  comme une composition de deux fonctions :

$$f : t \mapsto \sqrt{t} \quad \text{et} \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

La Jacobienne de  $f$  est :  $J_f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

La Jacobienne de  $g$  est la transposée de son gradient :

$$\nabla g(x)^T = 2[x_1, x_2, \dots, x_n] = 2x^T$$

En appliquant la règle donnant le Jacobien d'une fonction composée, nous obtenons :

$$\nabla \|x\|_2^T = J_f(g(x)) \cdot \nabla g(x)^T = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot 2x^T$$

Et finalement :

$$\nabla \|x\|_2 = \frac{x}{\|x\|_2}$$

(un vecteur de norme 1 dans la direction  $x$ ).

3. Calculez la Hessienne de la fonction  $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$  de  $\mathbf{R}^2$  vers  $\mathbf{R}$ .

**Solution :** Les dérivées partielles premières sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$$

La Hessienne est donc :

$$H(f) : x, y \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$$

4. Soit  $M$  une matrice à coefficients réels de taille  $n$  par  $n$ . Calculez la Hessienne de la fonction  $g_M : x \mapsto x^T M x$  de  $\mathbf{R}^n$  vers  $\mathbf{R}$ .

**Solution :**

La fonction  $g_M(x) = x^T M x$  peut être développée explicitement comme suit :

$$g_M(x) = \sum_{i,j} M_{ij} x_i x_j$$

Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pour trouver la dérivée première par rapport à  $x_i$ , réécrivons la fonction de manière à faire apparaître les termes en  $x_k$  :

$$g_M(x) = M_{kk} x_k^2 + \sum_{i \neq k} M_{ik} x_i x_k + \sum_{i \neq k} M_{ki} x_k x_i + \sum_{i \neq k} M_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq k} M_{ij} x_i x_j$$

On obtient en dérivant par rapport à  $x_k$

$$\frac{\partial g_M}{\partial x_k} : x \mapsto 2M_{kk} x_k + \sum_{i \neq k} M_{ik} x_i + \sum_{i \neq k} M_{ki} x_i = (M_{:k}^T + M_{k:})x$$

Et donc :  $\nabla g_M : x \mapsto (M^T + M)x$ .

La dérivée seconde est alors :

$$\frac{\partial^2 g_M}{\partial x_i \partial x_j}(x) = M_{ij} + M_{ji}$$

La Hessienne de  $g_M$  est donc :  $H(g_M) : x \mapsto M + M^T$ .

**Exercice 2** Existence et unicité des extrema. (★)

1. Considérons  $f : x \mapsto \sin(x)$  de  $[0, \pi]$  vers  $\mathbf{R}$ . On admet que comme  $f$  est définie sur un intervalle fermé borné et continue sur cet intervalle, elle admet un minimum global (cf. théorème de Weierstrass en analyse réelle [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_des\\_valeurs\\_extr%C3%AAmes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_valeurs_extr%C3%AAmes)). Trouver le minimum global de  $f$  en utilisant une condition nécessaire d'existence de minimum global.

**Solution :** Soit  $x^*$  un minimum global de  $f$  sur  $[0, \pi]$ . On peut raisonner par disjonction des cas.

**Cas 1:**  $x^* \in ]0, \pi[$ . Dans ce cas  $x^*$  est aussi un minimum local de  $f$  sur  $]0, \pi[$ . Or  $]0, \pi[$  est un ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $f$  est de classe  $C_1$  sur cet intervalle. Donc, la condition nécessaire d'existence de minimum local vue en cours s'applique et  $\nabla f(x^*) = 0$ , c'est à dire  $\cos(x^*) = 0$ . Or  $\cos(x) = 0$  a pour unique solution  $\pi/2$  sur  $]0, \pi[$ , donc  $x^* = \pi/2$ . On en déduit que si  $x^* \in ]0, \pi[$ , alors le minimum de  $f$  sur  $[0, \pi]$  est  $\sin(\pi/2) = 1$ .

**Cas 2:**  $x^* = 0$  ou  $x^* = \pi$ . Dans ce cas le minimum de  $f$  sur  $[0, \pi]$  est soit  $\sin(0) = 0$  soit  $\sin(\pi) = 0$ .

Comme  $0 < 1$ , on peut conclure que le minimum global de  $f$  est 0 (et qu'il est atteint deux fois, en 0 et en  $\pi$ ).

2. Montrez que la fonction  $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$  de  $\mathbf{R}^2$  vers  $\mathbf{R}$  admet un unique minimum global et identifiez ce minimum.

**Solution :**  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}^2$  et coercive, elle admet donc (au moins) un minimum global sur  $\mathbf{R}^2$  (car  $\mathbf{R}^2$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbf{R}^2$ ).

Soit  $x^*, y^*$  un minimum global de  $f$ .  $x^*, y^*$  est aussi un minimum local de  $f$  et  $f$  est de classe  $C_1$  sur  $\mathbf{R}^2$  qui est un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ , donc  $\nabla f(x^*, y^*) = 2x^*, 2y^* = 0$ , donc  $x^*, y^* = 0, 0$ .

On en déduit que  $f$  atteint son minimum global de 0 uniquement en  $(0, 0)$ .

Notez qu'on pourrait aussi utiliser la convexité de  $f$  pour répondre à cette question.

3. Prouvez que la fonction  $f : x_1, x_2 \mapsto x_1^2 - 36x_1 - 36x_2 + x_2^2 + 150$  de  $\mathbf{R}^2$  vers  $\mathbf{R}$  admet un minimum global.

**Solution :**  $f$  est coercive, et comme elle est définie et continue sur  $\mathbf{R}^2$ , elle admet un minimum global.

**Exercice 3** Déterminez si  $f : x, y \mapsto xy + x^2 + 1 + 2y$  est convexe.

**Solution :**

Etudions la positivité de la Hessienne de  $f$ .

Les dérivées partielles premières de  $f$  sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2.$$

Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Donc la Hessienne est :

$$H(f) : x, y \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , on a  $(x, y)(H(f)(x, y))(x, y)^T = 2x^2 + 2xy$ .

Or  $2x^2 + 2xy$  est négatif pour  $x = 1$  et  $y = -3$  (par exemple), donc  $H(f)(1, -3)$  n'est pas semie-définie positive.

Or  $f$  étant de classe  $C_2$ , elle est convexe si et seulement si sa Hessienne est semie-définie positive sur l'intérieur de  $\mathbf{R}^2$ , c'est à dire sur  $\mathbf{R}^2$ .

Donc  $f$  n'est pas convexe.

**Exercice 4** Preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières. (★★)

1. Prouver que toute matrice semi-orthogonale de taille  $n$  par  $r$ , avec  $r \leq n$ , peut être complétée en une matrice orthogonale de taille  $n$  par  $n$ .
2. Soit  $A$  une matrice réelle de taille  $m$  par  $n$ . Montrer qu'il est possible de trouver une matrice colonne  $x$  de taille  $n$  et une matrice colonne  $y$  de taille  $m$ , telles que:  $Ax = \sigma y$ ,  $\|x\|_2 = 1$ ,  $\|y\|_2 = 1$  et  $\sigma = \|A\|_2$ . Indice : utiliser l'une des deux définitions équivalentes de  $\|A\|_2$ .
3. En utilisant le résultat de la première question,  $x$  et  $y$ , montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $U$  de taille  $m$  par  $m$ , une matrice orthogonale  $V$  de taille  $n$  par  $n$ , une matrice colonne  $w$  de taille  $n - 1$  et une matrice  $B$  de taille  $m - 1$  par  $n - 1$ , telles que :

$$A_1 := U^T A V = \begin{pmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que  $\|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + w^T w$ . Indice : multiplier  $A_1$  par  $(\sigma w^T)^T$ .
5. Montrer que  $\|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2$  et en déduire la valeur de  $w$ .
6. Utiliser un raisonnement par récurrence pour compléter la preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières.

## 2 Optimisation sous contraintes

**Rappel de cours.** Conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour des fonctions  $\mathcal{C}^1$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^d$ . Soit  $f$ ,  $(e_i)_{i=1}^{n_E}$  et  $(c_i)_{i=1}^{n_I}$  des fonctions de  $U$  vers  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Comme nous l'avons vu en cours, on dit que le point  $x^* \in U$  vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour le problème:

$$\min_{x \in U} \text{ tel que } \begin{cases} e_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} \end{cases}$$

si et seulement si il existe  $\lambda_E^* \in \mathbf{R}^{n_E}$  et  $\lambda_I^* \in \mathbf{R}^{n_I}$ , tels que:

1.  $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda_E^*, \lambda_I^*) = 0$ , où  $\mathcal{L}(x, \lambda_E, \lambda_I) = f(x) + \sum_{i=1}^{n_E} \lambda_{E,i} e_i(x) + \sum_{i=1}^{n_I} \lambda_{I,i} c_i(x)$
2.  $e_i(x^*) = 0$  pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n_E\}$
3.  $c_i(x^*) \leq 0$  pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n_I\}$
4.  $\lambda_{I,i} \geq 0$  pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n_I\}$
5.  $\lambda_{I,i} c_i(x^*) = 0$  pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n_I\}$

**Attention, les conditions KKT ne sont pas toujours des conditions nécessaires de solution locale. Pour qu'elles le soient, il faut qu'une condition de *qualifications des contraintes* soit vérifiée au point considéré. Nous avons vu quatre de ces conditions en cours.**

**Exercice 5** Application des conditions KKT. (★)

On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbf{R}} x \text{ tel que } x^2(1-x)(2-x) \leq 0.$$

1. Donnez les conditions KKT pour ce problème.
2. Trouvez tous les points solutions des conditions de KKT pour ce problème.
3. Donnez en le justifiant toutes les solutions globales de ce problème.
4. Faites un graphe pour vérifier la plausibilité de vos réponses.

**Exercice 6** Application des conditions KKT. (★)

On considère le problème

$$\min_{x,y \in \mathbf{R}^2} x^2 + y^2 \text{ tel que } \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \leq 2 \\ y^2 \geq x \end{cases}$$

1. Donnez les conditions KKT pour ce problème.

**Solution :** On peut prendre :  $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ ,  $c_1 : x, y \mapsto 1 - x - y$ ,  $c_2 : x, y \mapsto y - 2$ ,  $c_3 : x, y \mapsto x - y^2$ . On a  $\mathcal{L} : x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mapsto x^2 + y^2 + \lambda_1(1 - x - y) + \lambda_2(y - 2) + \lambda_3(x - y^2)$  et les conditions KKT sont donc :

- (a)  $2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$  et  $2y(1 - \lambda_3) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$
- (b)  $y^2 \geq x$ ,  $y \leq 2$  et  $x + y \geq 1$
- (c)  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  et  $\lambda_3 \geq 0$
- (d)  $\lambda_1(1 - x - y) = 0$ ,  $\lambda_2(y - 2) = 0$  et  $\lambda_3(x - y^2) = 0$

2. Trouvez tous les points solutions des conditions de KKT pour ce problème.

**Solution :** On raisonne par disjonction des cas selon les contraintes saturées.

- (a) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Alors la nullité du gradient du Lagrangien nous donne que  $(x, y) = (0, 0)$ , mais alors  $x + y = 0 < 1$ . Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.
- (b) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  et  $\lambda_3 \neq 0$ . Alors,  $x = -\lambda_3/2$ ,  $y^2 = x$  et  $y = 0$  ou  $\lambda_3 = 1$ . Si  $y = 0$ , alors  $x = 0$ , ce qui ne donne pas une solution comme on l'a déjà vu. Si  $\lambda_3 = 1$ , alors  $x = -1/2$ . Mais  $y^2 = -1/2$  ne possède pas de solution pour  $y \in \mathbf{R}$ . Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

**Solution :** (Continuée)

(a) Si  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$ . Alors  $x = 0$ ,  $y = -\lambda_2/2$  et  $y = 2$ . Cela contredit la condition  $\lambda_2 \geq 0$ . Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(b) Si  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  et  $\lambda_1 \neq 0$ . Alors  $x = y = \lambda_1/2$  et  $x + y = 1$ . Donc  $x = y = 1/2$  et  $\lambda_1 = 1$ . Cela contredit la contrainte  $y^2 \geq x$ . Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(c) Si  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$ ,  $\lambda_3 \neq 0$ . Alors  $\lambda_3 = -2x$ ,  $\lambda_2 = 2y(\lambda_3 - 1)$ ,  $y = 2$  et  $x = y^2 = 4$ . Donc  $\lambda_3 = -8$  et  $\lambda_2 = -36$ . Cela contredit les conditions  $\lambda_2 \geq 0$  et  $\lambda_3 \geq 0$ . Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(d) Si  $\lambda_2 = 0$  et  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_3 \neq 0$ . Alors  $\lambda_3 = \lambda_1 - 2x$ ,  $\lambda_1 = 2y \frac{1+2x}{1+2y}$ ,  $x + y = 1$  et  $x = y^2$ . Donc  $y^2 + y - 1 = 0$ . D'où  $y = -1/2 + \sqrt{5}/2$  ou  $y = -1/2 - \sqrt{5}/2$ .

- Si  $y = -1/2 + \sqrt{5}/2$ , alors  $x = 3/2 - \sqrt{5}/2$ ,  $\lambda_1 = \frac{25-9\sqrt{5}}{5} \approx 0.975$  et  $\lambda_3 = \frac{10-4\sqrt{5}}{5} \approx 0.211$ . On obtient après vérification que les conditions KKT sont vérifiées si et seulement si :

$$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{25 - 9\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5} \right).$$

- Si  $y = -1/2 - \sqrt{5}/2$ , alors  $x = 3/2 + \sqrt{5}/2$ ,  $\lambda_1 = \frac{25+9\sqrt{5}}{5}$  et  $\lambda_3 = \frac{10+4\sqrt{5}}{5}$ . On obtient après vérification que les conditions KKT sont vérifiées si et seulement si :

$$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{25 + 9\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{10 + 4\sqrt{5}}{5} \right).$$

(e) Si  $\lambda_3 = 0$  et  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ . Alors  $\lambda_1 = 2x$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1 - 2y$ ,  $x + y = 1$  et  $y = 2$ . Donc  $x = -1$ ,  $\lambda_1 = -2$  et  $\lambda_2 = -6$ . Cela contredit les conditions  $\lambda_1 \geq 0$  et  $\lambda_2 \geq 0$ . Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(f) Si  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  et  $\lambda_3 \neq 0$ . Alors,  $x + y = 1$ ,  $y = 2$  et  $y = x^2$ . Ce système d'équations ne possède pas de solution. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

Au final, il n'y a que deux points  $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de  $\mathbf{R}^5$  satisfaisant les conditions KKT (donnés ci-dessus).

3. Donnez en le justifiant toutes les solutions globales de ce problème.

**Solution :** Cherchons des conditions nécessaires pour que  $x \in \mathbf{R}^2$  soit une solution globale. Si  $x$  est une solution globale, alors  $x$  est une solution locale. On raisonne par disjonction des cas sur les contraintes actives (comme dans la question précédente) pour appliquer les conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendantes données dans l'énoncé. On a  $\nabla c_1 : x, y \mapsto (1, 1)$ ,  $\nabla c_2 : x, y \mapsto (0, -1)$  et  $\nabla c_3 : x, y \mapsto (-1, 2y)$ .

- (a) Si en  $(x, y)$ , aucune contrainte n'est active ou une seule contrainte est active ou seulement deux contraintes sont actives, en excluant le cas où  $c_1$  et  $c_3$  sont actives, alors la matrice des gradients des contraintes actives est de rang plein et les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale.
- (b) Si en  $(x, y)$ , seules  $c_1$  et  $c_3$  sont actives, alors la matrice des gradients des contraintes actives est de rang plein sauf si  $y = -1/2$ . Mais si  $y = -1/2$  et  $c_1$  et  $c_3$  sont actives, alors  $x = 3/2$  et  $y^2 = 1/4 = x$ , ce qui est une contradiction. Si  $c_1$  et  $c_3$  sont actives, les conditions KKT sont donc des conditions nécessaires de solution locale.
- (c) On a déjà vu dans la question précédente qu'on ne peut pas avoir  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  actives simultanément en  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , on a donc traité tous les cas possibles.

On en conclut que les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale pour le problème considéré et donc que les seules solutions globales possibles sont :

$$(x_1, y_1) = \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \text{ et } (x_2, y_2) = \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right).$$

En calculant la valeur de  $f$  en  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  on voit que  $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ . Donc la seule solution globale possible est  $(x_1, y_1)$ .

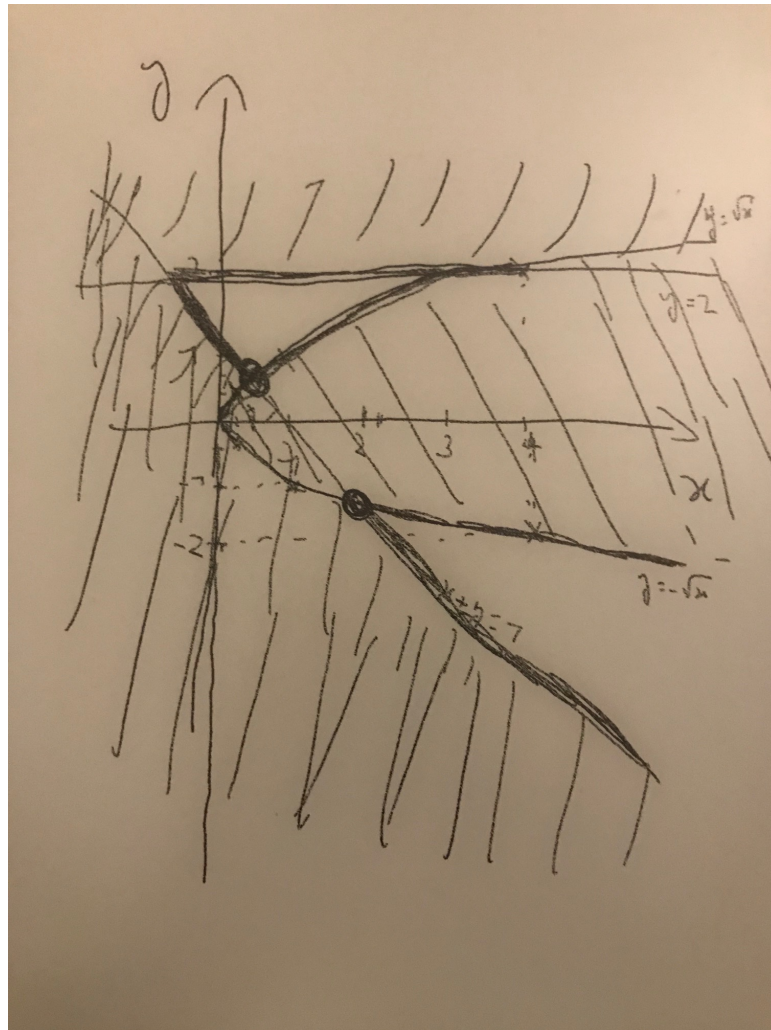
Il reste à déterminer si le problème admet au moins une solution globale. L'ensemble des  $\Omega$  des  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  vérifiant les contraintes d'inégalité  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  est un fermé de  $\mathbf{R}^2$  (cf. question suivante pour une visualisation de  $\Omega$ ) et  $f$  est continue et coercive sur  $\mathbf{R}^2$ . On en déduit que  $f$  admet (au moins) un minimum global sur  $\Omega$ .

Cela nous permet de conclure que le problème possède une unique solution globale en :

$$x^* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad y^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

4. Faites un graphe pour vérifier la plausibilité de vos réponses.

**Solution :**



**Exercice 7** On considère le problème

$$\min_{x,y \in \mathbf{R}^2} -2(x-2)^2 - y^2 \text{ tel que } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Donnez les conditions KKT pour ce problème.

**Solution :** On commence par mettre le problème sous la forme standard pour un problème d'optimisation sous contrainte en définissant :  $f : x, y \mapsto -2(x - 2)^2 - y^2$ ,  $c_1(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 25$  et  $c_2 : x, y \mapsto -x$ . Le Lagrangien associé à ce problème est :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y) + \lambda_1 c_1(x, y) + \lambda_2 c_2(x, y) \quad (1)$$

$$= -2(x - 2)^2 - y^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 25) - \lambda_2 x \quad (2)$$

Le gradient du Lagrangien par rapport à  $x$  et  $y$  est :

$$\nabla_{x,y} \mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \nabla_{x,y} f(x, y) + \lambda_1 \nabla_{x,y} c_1(x, y) + \lambda_2 \nabla_{x,y} c_2(x, y) \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} -4(x - 2) \\ -2y \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{bmatrix} 2(\lambda_1 - 2)x + 8 - \lambda_2 \\ 2(\lambda_1 - 1)y \end{bmatrix} \quad (5)$$

Nous pouvons à présent écrire les conditions KKT pour ce problème:

(a)  $2(\lambda_1 - 2)x + 8 - \lambda_2 = 0$

(b)  $2(\lambda_1 - 1)y = 0$

(c)  $x^2 + y^2 \leq 25$

(d)  $x \geq 0$

(e)  $\lambda_1 \geq 0$

(f)  $\lambda_2 \geq 0$

(g)  $\lambda_1(x^2 + y^2 - 25) = 0$

(h)  $\lambda_2 x = 0$

2. Trouvez tous les points solutions des conditions de KKT pour ce problème.

**Solution :** On raisonne par disjonction des cas selon que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont nuls ou non.

**Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ :** alors les conditions KKT se réduisent à :

(a)  $-4x + 8 = 0$

(b)  $-2y = 0$

(c)  $x^2 + y^2 \leq 25$

(d)  $x \geq 0$

On vérifie ensuite facilement que  $\mathbf{x} = \mathbf{2}; \mathbf{y} = \mathbf{0}; \lambda_1 = \mathbf{0}; \lambda_2 = \mathbf{0}$  est bien solution des conditions KKT, c'est donc l'unique solution dans ce cas.

**Si  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$ :** alors les conditions KKT se réduisent à :

(a)  $-4x + 8 - \lambda_2 = 0$

(b)  $-2y = 0$

(c)  $x^2 + y^2 \leq 25$

(d)  $x \geq 0$

(e)  $\lambda_2 \geq 0$

(f)  $\lambda_2 x = 0$

La deuxième équation donne  $y = 0$  et, comme par hypothèse  $\lambda_2 \neq 0$ , la dernière équation, donne  $x = 0$ . On obtient alors aussi :  $\lambda_2 = 8$  et on vérifie facilement que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}; \mathbf{y} = \mathbf{0}; \lambda_1 = \mathbf{0}; \lambda_2 = \mathbf{8}$  est bien solution des conditions KKT, c'est donc l'unique solution dans ce cas.

**Si  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 = 0$ :** alors les conditions KKT se réduisent à :

(a)  $2(\lambda_1 - 2)x + 8 = 0$

(b)  $2(\lambda_1 - 1)y = 0$

(c)  $x^2 + y^2 \leq 25$

(d)  $x \geq 0$

(e)  $\lambda_1 \geq 0$

(f)  $\lambda_1(x^2 + y^2 - 25) = 0$

Comme par hypothèse  $\lambda_2 \neq 0$ , la dernière équation, donne  $x^2 + y^2 = 25$ . La deuxième

**Solution :** (Suite de la solution)

- Si  $y = 0$ , on obtient  $x = 5$  ou  $x = -5$ , or  $x \geq 0$ , donc  $x = 5$ . Et la première équation devient:  $10\lambda_1 - 20 + 8 = 0$ , soit  $\lambda_1 = 1.2$  et on vérifie facilement que  $\mathbf{x} = \mathbf{5}; \mathbf{y} = \mathbf{0}; \lambda_1 = \mathbf{1.2}; \lambda_2 = \mathbf{0}$  est bien solution des conditions KKT, c'est donc l'unique solution dans ce cas.
- Si  $\lambda_1 = 1$ , la première équation donne,  $x = 4$  et la dernière donne  $y^2 = 9$ , et donc  $y = 3$  ou  $y = -3$ . On vérifie facilement que  $\mathbf{x} = \mathbf{4}; \mathbf{y} = \mathbf{3}; \lambda_1 = \mathbf{1}; \lambda_2 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x} = \mathbf{4}; \mathbf{y} = \mathbf{-3}; \lambda_1 = \mathbf{1}; \lambda_2 = \mathbf{0}$  sont bien solution des conditions KKT, ce donc les deux seules solutions dans ce cas.

**Si  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$ :** alors les conditions KKT se réduisent à :

(a)  $2(\lambda_1 - 2)x + 8 - \lambda_2 = 0$

(b)  $2(\lambda_1 - 1)y = 0$

(c)  $\lambda_1 \geq 0$

(d)  $\lambda_2 \geq 0$

(e)  $x^2 + y^2 = 25$

(f)  $x = 0$

On en déduit  $y^2 = 25$  et donc  $y = 5$  ou  $y = -5$ . La première équation donne  $\lambda_2 = 8$  et la deuxième  $\lambda_1 = 1$ . On vérifie facilement que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}; \mathbf{y} = \mathbf{5}; \lambda_1 = \mathbf{1}; \lambda_2 = \mathbf{8}$  et  $\mathbf{x} = \mathbf{0}; \mathbf{y} = \mathbf{-5}; \lambda_1 = \mathbf{1}; \lambda_2 = \mathbf{8}$  sont bien solution des conditions KKT, ce sont donc les deux seules solutions dans ce cas.

3. Donnez en le justifiant toutes les solutions globales de ce problème.

**Solution :**

On commence par chercher l'ensemble des points  $(x,y)$  pour lesquels un théorème de qualification des contraintes s'applique. Il y a plusieurs théorèmes de qualification des contraintes, regardons, par exemple, pour quel points  $(x,y)$  le théorème qui nécessite des gradients des contraintes actives linéairement indépendants (théorème 2 dans le cours) s'applique.

On raisonne par disjonction des cas en considérant quelles contraintes sont actives.

- Si aucune contrainte n'est active, la matrice des gradients des contraintes actives est la matrice vide, qui est de rang plein (0).
- Si seule la contrainte  $x^2 + y^2 = 25$  est active en  $(x,y)$ , la matrice des gradients des contraintes actives en  $(x,y)$  est  $\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$  qui est forcément de rang plein (1) car si  $x^2 + y^2 = 25$  alors on ne peut avoir  $x = y = 0$ .
- Si seule la contrainte  $x = 0$  est active en  $(x,y)$ , la matrice des gradients des contraintes actives en  $(x,y)$  est  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  qui est de rang plein (1).
- Si les deux contraintes  $x^2 + y^2 = 25$  et  $x = 0$  sont actives en  $(x,y)$ , alors la matrice des gradients des contraintes actives en  $(x,y)$  est  $\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 2y & 0 \end{bmatrix}$ , qui est forcément de rang plein (2), car elle est de rang plein sauf si  $y = 0$  et si  $y = 0$ , on ne peut avoir  $x^2 + y^2 = 25$  et  $x = 0$ .

On voit donc qu'un théorème de qualification des contraintes s'applique en tout point  $(x,y)$  faisable pour le problème (c'est à dire en tout point satisfaisant les contraintes). On en conclut que les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solutions locales en tout point faisable du problème.

Soit  $x^*, y^*$  une solution globale du problème, alors  $x^*, y^*$  est aussi une solution locale du problème et il existe  $\lambda_1, \lambda_2$ , tel que  $(x^*, y^*, \lambda_1, \lambda_2)$  soit solution des conditions KKT. D'après la question précédente, cela implique que :  $(x^*, y^*) \in \{(2,0); (0,0); (5,0); (4,3); (4,-3); (0,5); (0,-5)\}$ .

On calcule la valeur de  $f$  (la fonction à minimiser) en ces points:  $f(2,0) = 0$ ,  $f(0,0) = -8$ ,  $f(5,0) = -18$ ,  $f(4,3) = -17$ ,  $f(4,-3) = -17$ ,  $f(0,5) = -33$ ,  $f(0,-5) = -33$ .

On en conclut que si le problème admet une solution globale, alors cette solution globale est  $-33$  et est atteinte en exactement deux points:  $(x^*, y^*) = (0,5)$  et  $(x^*, y^*) = (0,-5)$ .

**Solution :** Il reste à montrer que le problème admet bien une solution globale.  $f$  n'est pas coercive, mais elle est définie et continue sur l'ensemble des réels  $x, y$  tels que  $x^2 + y^2 \leq 25$  et  $x \geq 0$ , qui est un ensemble fermé et borné (pour voir qu'il s'agit d'un ensemble borné, on peut remarquer, par exemple, qu'il est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 5). On peut donc appliquer le théorème de Weierstrass vu en cours pour conclure que le problème admet bien une solution globale.

**Exercice 8** Boîte de surface maximale à diagonale fixée. (★)

Trouvez le parallélépipède rectangle (pavé droit) dont la surface (somme des aires des six faces) est maximale parmi tous les parallélépipèdes rectangles de diagonale  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L$ , où  $L$  est un nombre réel strictement positif fixé et  $x_1, x_2, x_3$  sont les longueurs des côtés du parallélépipède rectangle.

**Solution :** Une modèle raisonnable pour la situation décrite est le problème de maximiser  $f(x_1, x_2, x_3) := 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$  sur  $\mathbf{R}^3$  sous la contrainte que  $e(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - L$  soit égal à 0 et que  $c_1(x_1, x_2, x_3) := x_1, c_2(x_1, x_2, x_3) := x_2$  and  $c_3(x_1, x_2, x_3) := x_3$  soient positive.

**Solution :** (Continuée)

Il s'agit d'un problème de maximisation d'une fonction continue sur un ensemble compact (fermé, borné) de  $\mathbf{R}^3$ , qui admet donc (au moins) une solution globale.

Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ .  $x$  vérifie les conditions KKT si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$  tels que :

1.  $\nabla_x(2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - L) - \lambda_1x_1 - \lambda_2x_2 - \lambda_3x_3) = 0$ , c'est à dire :

(a)  $2(x_2 + x_3 - \lambda x_1) - \lambda_1 = 0$

(b)  $2(x_1 + x_3 - \lambda x_2) - \lambda_2 = 0$

(c)  $2(x_1 + x_2 - \lambda x_3) - \lambda_3 = 0$

2.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L$

3.  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

4.  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

5.  $\lambda_1x_1 = \lambda_2x_2 = \lambda_3x_3 = 0$

Les gradients des contraintes sont :  $\nabla e(x) = 2x$ ,  $\nabla c_1(x) = (1, 0, 0)$ ,  $\nabla c_2(x) = (0, 1, 0)$ ,  $\nabla c_3(x) = (0, 0, 1)$ . Si  $x = (0, 0, 0)$   $e$  ne peut pas être satisfaite car  $L > 0$ . Si  $x \neq (0, 0, 0)$ , les trois contraintes d'inégalités ne sont pas actives en même temps et on vérifie immédiatement que les gradients des contraintes actives sont linéairement indépendants. On en déduit, en utilisant le théorème donnant les conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendantes, que les solutions globales du problème sont nécessairement atteintes en des points satisfaisant les conditions KKT.

On raisonne par disjonction des cas pour trouver tous les points vérifiant les conditions KKT.

1. On a déjà vu que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  ne convient pas.

2. Supposons  $x_1 = x_2 = 0$  et  $x_3 > 0$ . Alors  $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, \sqrt{L}, 0, 2\sqrt{L}, 2\sqrt{L}, 0)$  est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est 0. Le problème étant symétrique par permutation de  $(x_1, x_2, x_3)$ , les points KKT pour le cas  $x_1 = x_3 = 0$  et  $x_2 > 0$  et pour le cas  $x_2 = x_3 = 0$  et  $x_1 > 0$  s'obtiennent en prenant le symétrique approprié de la solution obtenue ci-dessus.

**Solution :** (Continuée)

3. Supposons  $x_1 = 0$  et  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . Alors  $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \sqrt{L/2}, \sqrt{L/2}, -1, 2\sqrt{2L}, 0, 0)$  est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est  $L$ . Le problème étant symétrique par permutation de  $(x_1, x_2, x_3)$ , les points KKT pour le cas  $x_2 = 0$  et  $x_1 > 0$ ,  $x_3 > 0$  et pour le cas  $x_3 = 0$  et  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  s'obtiennent en prenant le symétrique approprié de la solution obtenue ci-dessus.
4. Supposons  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  et  $x_3 > 0$ . Alors  $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\sqrt{L/3}, \sqrt{L/3}, \sqrt{L/3}, 2, 0, 0, 0)$  est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est  $2L$ .

Il y a donc une unique solution globale au problème considéré, données par un cube de côté  $\sqrt{L/3}$  et de surface  $2L$ .

#### Exercice 9 Optimisation sous contraintes.

On considère le problème

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2} 3x_1 + x_2 \text{ tel que } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Ecrivez le problème sous la forme d'un problème de minimisation sous contraintes et donnez les conditions KKT pour ce problème.

**Solution :** On réécrit le problème de *maximisation*

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} 3x_1 + x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

sous la forme d'un problème de *minimisation* en posant  $f(x) = -3x_1 - x_2$  et

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad g_2(x) = -x_1 \leq 0, \quad g_3(x) = -x_2 \leq 0.$$

Le problème équivalent est donc

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{s.c.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Les conditions KKT pour ce problème (avec multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) s'écrivent :

$$(\text{Stationnarité}) \quad \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) + \lambda_3 \nabla g_3(x) = 0,$$

$$(\text{Faisabilité primale}) \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(\text{Dualité}) \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(\text{Complémentarité}) \quad \lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Ici,

$$\nabla f(x) = (-3, -1), \quad \nabla g_1(x) = (2x_1, 2x_2), \quad \nabla g_2(x) = (-1, 0), \quad \nabla g_3(x) = (0, -1),$$

de sorte qu'on obtient, plus explicitement:

$$(a) \quad -3 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad -1 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0$$

$$(b) \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0$$

$$(c) \quad \lambda_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 \geq 0$$

$$(d) \quad \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 x_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 x_2 = 0$$

2. Trouvez tous les points solutions des conditions de KKT pour ce problème.

**Solution :** On raisonne par disjonction des cas en fonction des multiplicateurs de Lagrange égaux à zéro.

*Cas 1 :*  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . La stationnarité implique  $(-3, -1) = (0, 0)$ , donc il n'y a pas de solution des équations KKT dans ce cas.

*Cas 2 :*  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ . Alors  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  et

$$-3 + 2\lambda_1 x_1 = 0, \quad -1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1 x_1 = 3, \quad 2\lambda_1 x_2 = 1.$$

Donc  $x_1 = \frac{3}{2\lambda_1}, x_2 = \frac{1}{2\lambda_1}$  et, avec  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ,

$$\frac{9+1}{4\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

On vérifie facilement que le point  $x_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \lambda_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  est bien solution de toutes les équations KKT.

*Cas 3 :*  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$ . Alors  $x_1 = 0$  et la stationnarité donne  $-3 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -3 < 0$ , donc il n'y a pas de solution des équations KKT dans ce cas.

*Cas 4 :*  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$ . Alors  $x_2 = 0$  et la stationnarité donne  $-1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -1 < 0$ , donc il n'y a pas de solution des équations KKT dans ce cas.

*Cas 5 :*  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$ . Alors  $x_1 = 0$  et  $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$ . La stationnarité donne  $-3 - \lambda_2 = 0$ , ce qui implique  $\lambda_2 < 0$ , donc il n'y a pas de solution des équations KKT dans ce cas.

*Cas 6 :*  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$ . Alors  $x_2 = 0$  et  $x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$  (car  $x_1 \geq 0$ ). La stationnarité donne  $-1 - \lambda_3 = 0$  ce qui implique  $\lambda_3 < 0$ , donc il n'y a pas de solution des équations KKT dans ce cas.

*Cas 7 :*  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ . Alors  $x_1 = x_2 = 0$  et la stationnarité donne  $-3 - \lambda_2 = 0$ , ce qui implique  $\lambda_2 < 0$ , donc il n'y a pas de solution des équations KKT dans ce cas.

*Cas 8 :*  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ . Alors  $x_1 = x_2 = 0$  et  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , ce qui est impossible. Donc il n'y a pas de solution des équations KKT dans ce cas.

Conclusion : la seule solution des conditions KKT est le point

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \lambda_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$