# Mathématiques pour l'Intelligence Artificielle

Notes de cours – CM1

M2 Informatique – Parcours IAAA
Aix-Marseille Université

Enseignant : Thomas Schatz

Date : 2 septembre 2025

# Table des matières

# 1 Informations pratiques

- **Calendrier** : disponible sur le site IAAA et l'ENT AMU.
- **Communication** : via le canal Mattermost M2 IAAA (MIA).
- **Supports** : accessibles sur le site de l'enseignant : `https://thomas.schatz.cogserver.net/teaching/`.
- **Évaluation** :

$$\text{Note finale} = \max\big(0.5 \times \text{CC} + 0.5 \times \text{ET},\ \text{ET}\big)$$

  - Contrôle continu (10 points) :
    - 1 pt : être scribe d'une séance.
    - 2 pts : exercices à rendre (échantillon corrigé).
    - 7 pts : partiel le **23 septembre 2025**.
  - Examen terminal : le **14 octobre 2025**.
  - Les deux examens sont écrits, sans ordinateurs, calculatrices, montres ou objets connectés.

# 2 Plan du cours (prévisionnel)

1. Algèbre linéaire (2h)
2. Optimisation (4h)
3. Modélisation probabiliste (2h)
4. Probabilités, statistiques et théorie de l'apprentissage (4h)

# 3 Introduction générale

## 3.1 Définition de l'apprentissage automatique

L'apprentissage automatique (machine learning) peut être défini comme :

$$\text{Apprentissage automatique} = \text{Généralisation} + \text{Calcul intensif.}$$

## 3.2 Structure typique d'un problème d'apprentissage

Un problème d'apprentissage comprend plusieurs éléments :

- **Données d'entraînement** : base utilisée pour apprendre.
- **Espace de recherche** : ensemble des hypothèses ou paramètres possibles.
- **Fonction de perte** : mesure de l'erreur entre prédictions et observations.
- **Procédure d'entraînement** : recherche de l'hypothèse optimale.
- **Évaluation** : performance sur des données nouvelles, dans l'environnement de production.

Ces problèmes mobilisent des outils mathématiques fondamentaux :

1. Algèbre linéaire.
2. Optimisation.
3. Modélisation probabiliste.
4. Probabilités, statistiques et théorie de l'apprentissage.

# 4 Algèbre linéaire

## 4.1 Opérations matricielles : interprétations

La multiplication matricielle peut s'interpréter de différentes manières :

— **Produit matrice-vecteur** : combinaison linéaire des colonnes.

$$(Mv)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} v_i$$

où $a_j$ sont les colonnes de $A$.

— **Produit matrice-matrice** : colonnes de $C = AB$ obtenues par $A$ appliqué aux colonnes de $B$, ou lignes de $C$ obtenues par les lignes de $A$ appliquées à $B$.

$$(AB)_i j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

— **Interprétation produit scalaire** : les coefficients $c_{ij}$ de $C = AB$ s'écrivent

$$c_{ij} = \langle \tilde{a}_i, b_j \rangle$$

où $\tilde{a}_i$ est la $i$-ème ligne de $A$ et $b_j$ la $j$-ème colonne de $B$.

## 4.2 Produit scalaire et norme euclidienne

$$(a|b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a^T b = \|a\|_2 \|b\|_2 cos(\theta), \quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{(x|x)}.$$

Propriétés :

— Permet de définir **angles** et **orthogonalité**.

— Dans une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$, tout vecteur $v$ s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v|v_i)\, v_i.$$

## 4.3 Décomposition en valeurs singulières (SVD)

La SVD permet de généraliser la diagonalisation à toutes matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$A = U \Sigma V^T$$

où :

— $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ : vecteurs singuliers à gauche (orthogonaux).

— $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : vecteurs singuliers à droite (orthogonaux).

— $\Sigma$ : matrice diagonale contenant les valeurs singulières décroissantes $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

Applications :

— Réduction de dimension.

— Analyse des données.

— Compréhension des transformations linéaires dans les réseaux de neurones.