Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 1

Année 2025-26

Algèbre linéaire.

1 Concepts fondamentaux en algèbre linéaire

Exercice 1 Fonction linéaire. ($\star$)

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ x, y & \mapsto & x+y, x-y \end{array} \right.$$

Montrez que f est linéaire.

Exercice 2 Espaces vectoriels fonctionnels. ($\star\star$)

1. Proposez une notion d'addition et de produit scalaire naturelle sur l'espace $C^0([a, b], \mathbf{R})$ des fonctions continue d'un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$
2. Prouvez que les notions d'addition et de produit scalaire proposées munissent bien de $C^0([a, b], \mathbf{R})$ d'une structure d'espace vectoriel.
3. On considère la fonction e_x qui évalue une fonction continue en un point $x \in \mathbf{R}$:

$$e_x : \left| \begin{array}{ccc} C^0([a, b], \mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Prouvez que e_x est linéaire.

Exercice 3 Notions élémentaires. ($\star$)

1. Décrivez en language naturel l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(3, 3, 0)$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelle est la dimension de cet espace ?
3. Les vecteurs $(3, 2)$ et $(6, 4)$ de $\mathbf{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants ?
4. Qu'en est-il des vecteurs $(3, 2, 1)$ et $(6, 4, 0)$ de $\mathbf{R}^3$?
5. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle libre ?

6. Est-ce que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$?

7. Est-ce que de $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?

8. Démontrer par l'absurde le théorème sur la dimension d'un espace vectoriel vu en cours.

Exercice 4 Représentation matricielle des applications linéaires. ($\star$)

1. Donnez la matrice de l'application $f : x, y \mapsto y, 3x + y$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

2. Utilisez cette matrice pour trouver $f(6, 17)$.

3. A l'aide d'un produit matriciel, obtenez la matrice de la composée de f avec $g : x, y \mapsto x+y$.

4. Même question pour la composée de f avec $h_y : x \mapsto x + y$.

Exercice 5 Changement de système de coordonnées. ($\star$)

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.

Solution : $\mathbb{R}^2$ est un ($\mathbb{R}$-)espace vectoriel de dimension 2 et B est une famille de 2 éléments de $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de montrer que B est une famille libre, c'est à dire que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda_1 (3e_1 - 2e_2) + \lambda_2 (e_1 + e_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Soient λ_1, λ_2 deux nombres réels. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (3e_1 - 2e_2) + \lambda_2 (e_1 + e_2) = 0 &\Leftrightarrow (3\lambda_1 + \lambda_2) e_1 + (\lambda_2 - 2\lambda_1) e_2 = 0 && (1)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases} && (2)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -3\lambda_1 \\ -5\lambda_1 = 0 \end{cases} && (3)\\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, && (4)
\end{aligned}$$

où en (1) on a utilisé les propriétés élémentaires des opérations sur un espace vectoriel, en (2) on a utilisé le fait que $(e_1,\ e_2)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$, est une base et en (3) et (4) on a effectué des manipulations élémentaires sur un système d'équations dont les inconnues sont des nombres réels.

2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, alors $P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.

Solution : Notons $a_1 := 3e_1 - 2e_2$ et $a_2 := e_1 + e_2$. Comme nous l'avons montré en cours, la matrice de changement de base $P = (p_{i,j})_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2}$ retournant les coordonnées d'un vecteur dans la base (a_1, a_2) quand on l'applique aux coordonnées de ce vecteur dans la base (e_1, e_2) est telle que $\begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \end{pmatrix}$ sont respectivement les coordonnées de e_1 et de e_2 dans la base (a_1, a_2).

Or :

$$\begin{cases} a_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ a_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 5e_1 \\ a_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \\ e_2 = a_2 - \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \\ e_2 = \frac{1}{5}[-a_1 + 3a_2] \end{cases} \tag{5}$$

Donc :

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B.

Solution : Les coordonnées de v dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc ses coordonnées dans la base B sont $P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Représentation matricielles d'opérations linéaires sur les polynômes. ($\star\star$)

On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \mapsto & f(P) = (a_2 + a_0)X^3 + a_1 X^2 + a_0 \end{array} \right.$$

et les bases canoniques $V = (1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ et $W = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

1. Montrez que f est linéaire.

2. Donnez la matrice $M(f, V, W)$.

3. A l'aide de cette matrice, évaluez $f(X^2 - 3X + 1)$

Exercice 7 Différentes visions des opérations matricielles. ($\star$)

1. Écrire le produit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;

   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.

2. Écrire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme deux produits matrice-vecteur ;

   (b) comme deux produits vecteur-matrice ;

   (c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;

   (d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Solution :

1. (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T c \\ b^T c \end{pmatrix},$$

   où : $a := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ et $c := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

2. Notons C le produit matriciel considéré dans cette question.

   (a) On a :

$$C = \begin{pmatrix} Ab & Ac \end{pmatrix},$$

   où : $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $c := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$.

   (b) On a aussi :

$$C = \begin{pmatrix} bA \\ cA \end{pmatrix},$$

   où : $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $c := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution :

2. (c) On a également :

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Et finalement :

$$C = \begin{pmatrix} a^T c & a^T d \\ b^T c & b^T d \end{pmatrix},$$

où : $a := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $c := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $d := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Exercice 8 Matrix product with diagonal matrix. ($\star$)

On note $\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la matrice $\begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{bmatrix}$ with all the off-diagonal coefficients equal to zero.

1. Express the matrix product $A\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in terms of the columns of A and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Solution : We can write a general matrix product AX in terms of the columns of $X = [\mathbf{c_1}\ \mathbf{c_2}\ \ldots\ \mathbf{c_n}]$ as $AX = [A\mathbf{c_1}\ A\mathbf{c_2}\ \ldots\ A\mathbf{c_n}]$. Furthermore, we can write a general matrix vector product Av in terms of the columns of $A = [\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \ldots\ \mathbf{a_n}]$ as $Av = v_1\mathbf{a_1} + v_2\mathbf{a_2} + \cdots + v_n\mathbf{a_n}$. For $X = \text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, we thus have $A\mathbf{c_i} = c_{1i}\mathbf{a_1} + c_{2i}\mathbf{a_2}\ \cdots + c_{ni}\mathbf{a_n} = 0 + 0 + \cdots + 0 + x_i\mathbf{a_i} + 0 + \cdots + 0 = x_i\mathbf{a_i}$ and therefore

$$A\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1\mathbf{a_1}\ x_2\mathbf{a_2}\ \ldots\ x_n\mathbf{a_n}]$$

2. Express the matrix product $\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)B$ in terms of the lines of B and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Solution : Let us write B in terms of its rows as $B = [\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}\ \ldots\ \mathbf{b_n}]^T$. Then $\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)B = ((\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)B)^T)^T = (B^T\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T)^T = (B^T\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n))^T$. From the previous question, we then deduce

$$\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)B = [x_1\mathbf{b_1}\ x_2\mathbf{b_2}\ \ldots\ x_n\mathbf{b_n}]^T$$

Exercice 9 Matrices nilpotentes. ($\star\star$)

Soit N une matrice nilpotente de taille n par n (c'est à dire qu'il existe un entier p strictement positif, tel que $N^p = 0$). On définit $q := \inf\{r \mid N^r = 0, r \in \mathbf{N}, r > 0\}$ l'indice de nilpotence de N.

1. Montrer que $q \leq n$. Indice : par un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il existe une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ est une famille libre et conclure.

Solution :

Supposons que pour toute matrice colonne x_0 de taille n, $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ soit une famille liée. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe alors $(\alpha_i)_{i=0}^{q-1} \neq 0$ (où 0 représente un vecteur de n zéros), tel que :

$$\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i N^i x_0 = 0.$$

Notons $i_0 = \min\{i \mid 0 \leq i \leq q-1,\ \alpha_i \neq 0\}$. On a donc :

$$\sum_{i=i_0}^{q-1} \alpha_i N^i x_0 = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i N^i x_0 = 0,$$

avec $\alpha_{i_0} \neq 0$.

En multipliant à gauche par N^{q-1-i_0}, on obtient :

$$\sum_{i=i_0}^{q-1} \alpha_i N^{i+q-1-i_0} x_0 = N^{q-1-i_0} 0 = 0.$$

Par définition de q, pour tout $k \geq q$, $N^k x_0 = 0x_0 = 0$. On en déduit que :

$$\sum_{i=i_0}^{q-1} \alpha_i N^{i+q-1-i_0} x_0 = \alpha_{i_0} N^{q-1} x_0 = 0.$$

Solution : (continuée)

Et comme $\alpha_{i_0} \neq 0$, on obtient

$$N^{q-1} x_0 = 0.$$

On a donc obtenu pour tout x_0,

$$N^{q-1} x_0 = 0.$$

On en déduit que $N^{q-1} = 0$, ce qui est une contradiction avec la définition de q.

Il existe donc une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, \ldots, N^{q-1}x_0)$ est une famille libre de q vecteurs de $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ étant un espace vectoriel de dimension n, on a $q \leq n$.

2. Soit A et B deux matrices de taille n par n qui commutent (c'est à dire qu'on a $AB = BA$)

et soit k un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer l'identité remarquable :

$$A^k - B^k = (A - B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B^i\right).$$

Solution : On peut le montrer par exemple par récurrence.

— Cas de base. Pour $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned}(A - B)\left(\sum_{i=0}^{2-1} A^{2-1-i} B^i\right) &= (A - B)(A + B) \\ &= A^2 - BA + AB - B^2 \\ &= A^2 - AB + AB - B^2 \\ &= A^2 - B^2.\end{aligned}$$

— Propagation. Supposons que :

$$A^k - B^k = (A - B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B^i\right).$$

On a que : $A(A^k - B^k) + (A^k - B^k)B = A^{k+1} - AB^k + A^k B - B^{k+1}$.

Par conséquent : $A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A^k - B^k)B + AB^k - A^k B$.

Solution : (continuée)

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la commutativité de A et B, qui implique celle de A^i et B^j pour tous entiers naturels i et j, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
A^{k+1} - B^{k+1} &= A(A-B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right) + (A-B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right)B + AB^k - A^kB \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(A^{k+1-i}B^i - A^{k-i}B^{i+1} + A^{k-i}B^{i+1} - A^{k-1-i}B^{i+2}\right)\right) + AB^k - A^kB \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(A^{k+1-i}B^i - A^{k-1-i}B^{i+2}\right)\right) + AB^k - A^kB \\
&= A\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i}B^i\right) + AB^k - B\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^{i+1}\right) - A^kB \\
&= A\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i}B^i\right) + AB^k - B\left(\sum_{i=1}^{k} A^{k-i}B^i\right) - A^kB \\
&= A\left(\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i\right) - B\left(\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i\right) \\
&= (A-B)\left(\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i\right).
\end{aligned}$$

3. À l'aide d'un choix judicieux de A, B et k, montrer que $I-N$ est inversible et donner son inverse.

Solution : En prenant $A := I$, $B := N$ et $k := q$, A et B commutent car $IN = N = NI$, et on obtient donc que :

$$I^q - N^q = (I-N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} I^{q-1-i}N^i\right).$$

D'où :

$$I = (I-N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right).$$

De plus :

$$\begin{aligned}
(I-N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right) &= \sum_{i=0}^{q-1} N^i - \sum_{i=0}^{q-1} N^{i+1} \\
&= (\sum_{i=0}^{q-1} N^i)I - (\sum_{i=0}^{q-1} N^i)N \\
&= \left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right)(I-N).
\end{aligned}$$

Solution : (continuée)

Au final :

$$I = (I - N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right)(I - N),$$

et $I - N$ est donc inversible, d'inverse $\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right)$.

4. Soit a un nombre réel. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice de taille n par n :

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

Si $a = 0$, $M_a = I$ et M_a est donc inversible d'inverse I. Considérons maintenant le cas $a \neq 0$.

On a $M_a = I = N_a$, où

$$N_a := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons les puissances N_a^r de N_a pour r entier positif et montrons que N_a est nilpotente.

On peut décrire N_a de manière équivalente comme la matrice $(n_{a,i,j})$ avec pour tout $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $n_{a,i,j} = a\delta_{i+1,j}$, où pour tous entiers s, t, $d_{st} = 1$ si et seulement si $s = t$ et $d_{st} = 0$ sinon.

En utilisant cette caractérisation et la formule terme à terme pour le produit matriciel ($c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ pour un produit matriciel $C = AB$), on montre facilement par récurrence que pour tout entier positif r, $N_a^r = (n_{r,a,i,j})$ avec $n_{r,a,i,j} = a^r\delta_{i+r,j}$.

On en déduit que N_a est nilpotente d'ordre n.

Solution : (continuée)

En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient finalement que M_a est inversible d'inverse :

$$M_a^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} N_a^i,$$

c'est à dire que :

$$M_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Algèbre linéaire : orthogonalité

Exercice 10 Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$. ($\star$)

Prouvez que la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x, y \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 11 Matrices orthogonales. ($\star$)

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ les coordonnées de n vecteurs de dimensions d dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$.

1. On suppose que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, calculez le produit matriciel $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$, où on a considéré les v_i comme des matrices colonnes.
2. Même question, si on suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux.
3. Montrez que pour une matrice carrée A, s'il existe une matrice carrée B, telle que $AB = I$, alors on a aussi $BA = I$.

   Solution : On a $B(AB) = B = (BA)B$, donc $(I - BA)B = 0$. Or B est nécessairement de rang plein puisque AB est de rang plein, donc pour tout vecteur x, $(I - BA)x = 0$, donc $BA = I$.
4. On suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux et que $n = d$. Montrez que la matrice $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ est inversible et donnez son inverse.

Exercice 12 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et décomposition QR. ($\star$)

On considère le vecteur de v_1 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(3, 1)$ et le vecteur v_2 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(2, 2)$.

1. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (v_1, v_2).
2. En déduire une décomposition de la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   commme un produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 13 Validité du processus de Gram-Schmidt. $(\star\star)$

Etant donnés un espace vectoriel E et un produit scalaire $(.|.)$ quelconques (possiblement en dimension infinie), prouvez par récurrence que la famille de vecteurs produite par le processus de Gram-Schmidt est orthonormale.

Exercice 14 Polynômes orthogonaux. $(\star\star\star)$

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif d et des nombres réels a_0, a_1, $\ldots$, a_d, tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.

Solution : Nous définissons une opération d'addition

$$+ : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R}[X] \\ P, Q & \mapsto & P + Q \end{array} \right.$$

sur **R**[X] en prenant pour tout $P = \sum_{i=1}^{d_1} a_i$ et $Q = \sum_{i=1}^{d_2} b_i$:

$$P + Q := \sum_{i=0}^{\max(d1,d2)} (\tilde{a}_i + \tilde{b}_i) X^i,$$

où $\tilde{a}_i = a_i$ si $i \leq d_1$ et 0 sinon et $\tilde{b}_i = b_i$ si $i \leq d_2$ et 0 sinon.

Pour la multiplication par un scalaire :

$$. : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R} \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R}[X] \\ \alpha, P & \mapsto & \alpha P \end{array} \right.$$

sur **R**[X] nous prenons pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et $P = \sum_{i=1}^{d_1} a_i$:

$$\alpha P := \sum_{i=0}^{d} (\alpha a_i) X^i.$$

Les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication sur **R** permettent de vérifier l'associativité, la commutativité, l'existence d'un élément neutre et d'inverses pour $+$ sur $\mathbf{R}[X]$, ainsi que la compatibilité de . avec la multiplication sur **R**, la présence d'un élement neutre pour . et la distributivité de . par rapport à l'addition sur **R** et sur $\mathbf{R}[X]$.

On en conclut que $(\mathbf{R}[X], +, .)$ est un **R**-espace vectoriel.

2. Montrer que :

$$(. \mid .) : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Solution : Un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Avant tout, remarquons que les fonctions polynômiales d'une variable réelle sont continues sur $[0,1]$ intervalle compact de $\mathbf{R}$, il n'y donc pas de problèmes de définition de l'intégrale ci-dessus.

En appliquant notre définition d'addition sur $\mathbf{R}[X]$ et la linéarité de l'intégration, on obtient que $(. \mid .)$ est une forme bilinéaire. Elle est symétrique par commutativité de la multiplication sur $\mathbf{R}$. Elle est positive car pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $(P \mid P) = \int_0^1 P^2(x)dx$ et l'intégrale d'une fonction positive est toujours positive. Elle est définie car : 1) les fonctions polynomiales sont continues sur $]0,1[$, intervalle ouvert non vide, 2) l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle ouvert non vide ne peut être égale à zéro que si la fonction est égale à zéro sur cet intervalle 3) la fonction polynomiale associé à un polynôme ne peut être égale à zéro sur un intervalle ouvert non vide que si tous les coefficients du polynôme sont égaux à zéro.

3. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(. \mid .)$ et telle que pour tout entier positif n, le degré de P_n est n et le coefficient d'ordre n de P_n est strictement positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.

Solution :

La décomposition canonique des polynômes comme combinaison linéaire de $(1, X, X^2, \dots)$ établit que $\mathcal{B} := (X^i)_{i=0}^{+\infty}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base en définissant par récurrence :

$$P_0 = 1,$$

$$\tilde{P}_n = X^n - \sum_{j=0}^{n-1} (X^n \mid P_j) P_j,$$

et enfin :

$$P_n = \frac{\tilde{P}_n}{\sqrt{(\tilde{P}_n \mid \tilde{P}_n)}},$$

pour tout entier strictement positif n.

Solution : (continuée)

La preuve par récurrence que la famille $\mathcal{P} := (P_i)_{i=0}^{+\infty}$ résultante est est une base orthonormale de $\mathbf{R}[X]$ est identique au cas vu en cours. Une récurrence immédiate établit que pour tout entier positif n, $\tilde{P}_n$ et P_n sont de degré n, que le coefficient dominant de $\tilde{P}_n$ est 1 et que le coefficient dominant de P est $\frac{1}{\sqrt{(\tilde{P}_n|\tilde{P}_n)}} > 0$.

Il reste à prouver l'unicité d'une base possédant ces propriétés. Supposons qu'on ait trouvé une base $\mathcal{Q} := (Q_i)_{i=0}^{+\infty}$ avec les mêmes propriétés qui soit différente de $\mathcal{P}$. Notons k le plus petit indice tel que $P_k \neq Q_k$. Par hypothèse, le degré de Q_k est k, on peut donc écrire $Q_k = \sum_{i=0}^{k}(Q_k \mid P_i)P_i$. Pour tout entier i, $0 \leq i < k$, on a que $Q_i = P_i$ et donc $(Q_k \mid P_i) = (Q_k \mid Q_i) = 0$ par orthonormalité de $\mathcal{Q}$. Donc $Q_k = (Q_k \mid P_k)P_k$. On en déduit que $\|Q_k\| = |(Q_k \mid P_k)|^2\|P_k\|$. Comme $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont orthonormale, on a $\|Q_k\| = \|P_k\| = 1$. ON en déduit que $|(Q_k \mid P_k)|^2 = 1$ et donc que $(Q_k \mid P_k)$ est égal à -1 ou 1. Or $(Q_k \mid P_k)$ est le coefficient dominant de Q_k et est donc par hypothèse positif. On en conclut que $(Q_k \mid P_k) = 1$ et donc que $Q_k = P_k$, ce qui contredit notre hypothèse que $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$.

4. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$?

Solution : Les bases de $\mathbf{R}[X]$ que nous avons trouvé contiennent un nombre d'élément infini (plus précisémment, un infini dénombrable). $\mathbf{R}[X]$ est donc un espace vectoriel de dimension infinie (plus précisémment de dimension égale au cardinal de $\mathbf{N}$).

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (a_nX + b_n)P_{n-1}(X) + c_nP_{n-2}(X),$$

pour des suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (c_n) qu'on explicitera.

Solution : Un élément central de la preuve est la propriété suivante : pour tous polynômes P et Q :

$$(XP \mid Q) = \int_0^1 xP(x)Q(x)dx = \int_0^1 P(x)xQ(x)dx = (P \mid XQ).$$

Solution : (continuée)

Cette propriété permet notamment d'établir que tout polynôme R de la forme :

$$R = (aX + b)P_{n-1} + cP_{n-2},$$

où a, b et c sont des réels, est orthogonal à P_0, à P_1, ..., et à P_{n-3}. En effet, prenons un entier k dans $\{0, 1, \ldots, n-3\}$. On a :

$$(R \mid P_k) = a(XP_{n-1} \mid P_k) + b(P_{n-1} \mid P_k) + c(P_{n-2} \mid P_k) = a(P_{n-1} \mid XP_k) + 0 + 0.$$

Comme le degré de P_k est $k < n-2$, le degré de XP_k est strictement inférieur à $n-1$ et donc $XP_k \in \mathrm{Vect}\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}\}$. Par orthonormalité de $\mathcal{P}$, on en déduit que XP_k est orthonormal à P_{n-1} et donc que $(R \mid P_k) = 0$.

Une conséquence de ce résultat est que si pour tout $n \geq 2$ on pouvait trouver des réels a_n, b_n et c_n tels que la projection de $R_n = a_n XP_{n-1} + b_n P_{n-1} + c_n P_{n-2}$ sur, respectivement, P_n, P_{n-1} et P_{n-2} soit, respectivement, 1, 0 et 0, alors on aurait forcément pour tout $n \geq 2$, $R_n = P_n$ (en utilisant le résultat d'unicité de la question 3), ce qui résoudrait la question.

Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'on peut trouver de tels réels a_n, b_n et c_n pour tout $n \geq 2$. Soit $n \geq 2$, on a :

$$(R_n \mid P_n) = a_n(XP_{n-1} \mid P_n) + 0 + 0.$$

Calculons plus explicitement $(XP_{n-1} \mid P_n)$ pour vérifier qu'il est non-nul, ce qui nous permettra de garantir $(R_n \mid P_n) = 1$ en prenant $a_n := \frac{1}{(XP_{n-1} \mid P_n)}$.

Le degré de XP_{n-1} est n, on peut donc l'écrire :

$$XP_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} (XP_{n-1} \mid P_i) P_i.$$

Les coefficients dominants des polynômes à gauche et à droite du signe d'égalité sont respectivement λ_{n-1} et $\lambda_n(XP_{n-1} \mid P_n)$, où pour tout entier k, λ_k est le coefficient dominant de P_k (donc $\lambda_k \neq 0$). On a donc : $\lambda_{n-1} = \lambda_n(XP_{n-1} \mid P_n)$ avec $\lambda_{n-1} \neq 0$ et $\lambda_n \neq 0$, d'où :

$$(XP_{n-1} \mid P_n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \neq 0.$$

Solution : (continuée)

En prenant :

$$a_n := \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}},$$

on a donc $(R_n \mid P_n) = 1$.

Considérons maintenant la projection sur P_{n-1} :

$$(R_n \mid P_{n-1}) = a_n(XP_{n-1} \mid P_{n-1}) + b_n.$$

En prenant :

$$b_n := -\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}(XP_{n-1} \mid P_{n-1})$$

on a donc $(R_n \mid P_{n-1}) = 0$.

Finalement, considérons la projection sur P_{n-2} :

$$(R_n \mid P_{n-2}) = a_n(XP_{n-1} \mid P_{n-2}) + c_n.$$

En prenant :

$$c_n := -\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}(XP_{n-1} \mid P_{n-2})$$

on a donc $(R_n \mid P_{n-2}) = 0$.

On peut obtenir une expression plus explicite pour c_n en remarquant que :

$$(XP_{n-1} \mid P_{n-2}) = (P_{n-1} \mid XP_{n-2}) = (XP_{n-2} \mid P_{n-1}) = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}},$$

par un raisonnement analogue au cas de $(XP_{n-1} \mid P_n)$. On obtient alors :

$$c_n = -\frac{\lambda_n \lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}^2}.$$

3 Algèbre linéaire : structure des applications linéaires

Exercice 15 Propriétés élémentaires de la décomposition en valeurs singulières. ($\star$)

Indice : dans le cadre de cet exercice, pensez aux différentes interprétations des produits matrice-matrice et matrice-vecteurs que nous avons vu en cours.

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par n. Le théorème sur la décomposition en valeurs singulières indique qu'il existe une matrice orthogonale $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$ de taille m par m, une matrice orthogonale $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ de taille n par n, un entier naturel $r \leq \min(m, n)$ et une matrice diagonale $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ de taille m par n, tels que toutes les matrices sont à coefficients réels, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ et $AV = U\Sigma$.

1. Montrez que $A = U\Sigma V^T$ et que $\Sigma = U^T AV$.

Solution : $AV = U\Sigma$ donc $AVV^T = U\Sigma V^T$ or $VV^T = I$, donc $A = U\Sigma V^T$. $AV = U\Sigma$ donc $U^T AV = U^T U\Sigma$ or $U^T U = I$, donc $\Sigma = U^T AV$.

2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \dots, r\}$, $Av_i = \sigma_i u_i$.

Solution : $AV = [Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n]$ et (cf. exercice 8), $U\Sigma = [\sigma_1 u_1 \ \sigma_2 u_2 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$. Donc $Av_i = \sigma_i u_i$ pour tout i dans $\{1, 2, \dots, r\}$.

3. Montrez que pour tout i dans $\{r + 1, r + 2, \dots, n\}$, $Av_i = 0$, i.e. $v_i \in \text{Ker}A$.

Solution : Nous l'avons établi à la question précédente.

4. Montrez que $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$.

Solution : D'après l'exercice 8, $U\Sigma = [\sigma_1 u_1 \ \sigma_2 u_2 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$. Donc

$$A = U\Sigma V^T = [\sigma_1 u_1 \ \sigma_2 u_2 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]V^T.$$

Nous pouvons alors écrire ce produit matrice-matrice comme une somme de produits de matrices de rang 1 pour obtenir :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T + \sum_{i=r+1}^{n} 0 v_i^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T.$$

Exercice 16 Dérivation des théorèmes fondamentaux de l'algèbre linéaire à partir de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

On considère le même point de départ que dans l'exercice précédent (décomposition en valeur singulière d'une matrice A).

1. Montrez que les r premières colonnes de U forment une base orthonormale de l'image de A.
2. Montrez que les $m - r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale du co-noyau de A (i.e. le noyau de A^T).
3. Montrez que les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de la co-image de A (i.e. l'image de A^T).

4. Montrez que les $n-r$ dernières colonnes de V forment une base orthonormale du noyau de A.

5. Montrez que le noyau et la co-image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire qu'on peut décomposer tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ de manière unique en une somme de deux vecteurs orthogonaux, l'un appartenant au noyau de A et l'autre appartenant à la co-image de A.

6. Montrez que le co-noyau et l'image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^m$.

7. Montrez qu'il existe un unique entier naturel $r \leq \min(m, n)$, le range de A, tel que l'image et la co-image de A sont de même dimension r.

8. Montrez que l'entier r de la question précédente est aussi la dimension de l'image de toute application linéaire $f : E \to F$ telle qu'il existe des bases B_E et B_F de E et F telles que $A = M(f, B_E, B_F)$.

9. Montrez que la matrice A est inversible—c'est à dire qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$—si et seulement si $r = m = n$ et donnez une expression pour A^{-1} en fonction de U, Σ et V.

Solution : Éléments de solution

Soit A une matrice réelle de taille m par n. On a vu qu'il existait alors une matrice orthogonale U de taille m par m, une matrice orthogonale V de taille n par n, un entier positif $r \leq \min(m, n)$, des réels $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ et une matrice de taille m par n,

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \begin{matrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r \end{matrix} & \mathbf{0}_{m,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

tels que, $A = U\Sigma V^T$.

Nous allons montrer que la décomposition en valeurs singulières nous informe immédiatement sur les espaces fondamentaux associés à A et sur leurs relations. Les espaces fondamentaux associés à A sont son noyau $\mathrm{Ker}(A) := \{v \in \mathbf{R^n} \mid Av = 0\}$, son image $\mathrm{Im}(A) := \{u \in \mathbf{R^m} \mid \text{ il existe } v \in \mathbf{R}^n,\ Av = u\}$, son co-noyau $\mathrm{Ker}(A^T)$ et sa co-image $\mathrm{Im}(A^T)$.

On peut déduire rapidement de la SVD que :

1. les r premières colonnes de U forment une base orthonormale de $\mathrm{Im}(A)$;
2. les $n - r$ dernières colonnes de V forment une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(A)$;
3. les $m - r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(A^T)$;
4. les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de $\mathrm{Im}(A^T)$.

On a comme corollaires immédiats—mais importants—que :

5. $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}(A^T) = r$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = n - r$ et $\dim \mathrm{Ker}(A^T) = m - r$;
6. $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^T)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathbf{R}^m$;
7. $\mathrm{Im}(A^T)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathbf{R}^n$.

Solution : *Preuve.* On montre uniquement les 4 premières propositions. Les corollaires sont immédiats.

1. U étant orthogonale, ces colonnes sont orthonormales. Il suffit donc de montrer que tout $u \in \mathrm{Im}(A)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des r premières colonnes de U et réciproquement que toute combinaison linéaire des r premières colonnes de U appartient à $\mathrm{Im}(A)$.

   Notons u_i la i-ième colonne de U. Soit $u \in \mathrm{Im}(A)$. Alors il existe $v \in \mathbf{R}^n,\ Av = u$. Notons $w := \Sigma V^T v$. Comme seules les r premières composantes de w peuvent être différentes de 0 (du fait de la multiplication par Σ), on a $Uw = \sum_{i=1}^{r} w_i u_i$. Or $Uw = U\Sigma V^T v = Av$, donc Av peut bien s'écrire comme une combinaison linéaire des r premières colonnes de U.

   Réciproquement, soit r nombres réels $w_1, w_2, \ldots, w_r$ et soit $u := \sum_{i=1}^{r} w_i u_i$. Alors $u = Uw$, pour

$$w := \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \\ \mathbf{0}_{m-r} \end{bmatrix}.$$

   On a alors $w = \Sigma x$, où :

$$x := \begin{bmatrix} w_1/\sigma_1 \\ w_2/\sigma_2 \\ \vdots \\ w_r/\sigma_r \\ \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix}$$

   et, puisque V est orthogonale, on a que $v = Vx$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$, tel que $Av = U\Sigma V^T v = U\Sigma V^T V x = U\Sigma x = Uw = u$. Donc $u \in \mathrm{Im}(A)$.

2. Notons v_i la i-ième colonne de v. Soit $v \in \mathrm{Ker}(V)$. Alors $Av = U\Sigma V^T v = 0$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tel que $(V^T v)_i = w_i \neq 0$. Alors $(\Sigma V^T v)_i = \sigma_i w_i \neq 0$ et comme U est orthogonale et donc de rang plein, on en déduit que $(U\Sigma V^T v)_i = (Av)_i$ est différent de 0. On obtient une contradiction, donc $(V^T v)_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Par ailleurs, comme V est orthogonale, on a $v = VV^T v = V(V^T v) = \sum_{i=1}^{n} (V^T v)_i v_i$. On a donc au final que v peut s'écrire comme la combinaison linéaire $\sum_{i=r+1}^{n} (V^T v)_i v_i$ des $n - r$ dernières colonnes de V.

Solution : (suite de la preuve) Réciproquement, soit r nombres réels $w_1, w_2, \ldots, w_r$ et soit $v := \sum_{i=r+1}^{n} w_i v_i$. Alors, $Av = U\Sigma V^T v$. $(V^T v)_i = v_i^T v = v_i^T(\sum_{j=r+1}^{n} w_j v_j) = w_i$ si $i \geq r+1$ et 0 si $0 \leq i \leq r$, car V est orthogonale. D'où, $\Sigma V^T v = 0$ et donc $Av = U\Sigma V^T v = 0$ et $v \in \text{Ker}(A)$.

3. On a $A^T = V\Sigma^T U^T$, et donc V, Σ^T et U^T donnent une décomposition en valeurs singulières de A^T. On peut donc appliquer la proposition 2 pour obtenir que les $m-r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale de $\text{Ker}(A^T)$.
4. De la même façon que pour la proposition précédente, on peut appliquer la proposition 1 sur la décomposition $A^T = V\Sigma^T U^T$ pour obtenir que les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de $Im(A)^T$.

$\square$

Exercice 17 Décomposition en valeurs singulières des matrices orthogonales. ($\star$)

Déterminez les valeurs singulières d'une matrice orthogonale.

Exercice 18 Propriétés élémentaires de la décomposition spectrale. ($\star$)

Soit S une matrice à coefficients réels de taille m par m symmétrique. Le théorème spectral indique qu'il existe une matrice orthogonale réelle $Q = [q_1\ q_2\ \ldots q_m]$ de taille m par m et une matrice diagonale réelle $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ de taille m par m, telles que $S = Q\Lambda Q^T$.

1. Montrez que $\Lambda = Q^T SQ$ et que $SQ = Q\Lambda$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $Sq_i = \lambda_i q_i$.
3. Montrez que $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$.
4. Proposez une interprétation intuitive du résultat du produit matrice vecteur Sv en vous appuyant sur la réponse à la question précédente.
5. On considère un polynôme P. Calculer $P(S)$ en fonction de Q et Λ.

Exercice 19 Éléments propres de $A^T A$ et AA^T. ($\star$)

1. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.

Solution : On sait qu'il existe une décomposition en valeurs singulières de A, c'est à dire qu'il existe une matrice orthogonale U de taille $m \times m$, une matrice orthogonale V de taille $n \times n$ et une matrice rectangulaire diagonale Σ de taille $m \times n$ dont les $\min(m, n)$ valeurs diagonales sont rangées en ordre décroissant et positives, telles que $A = U\Sigma V^T$. De plus, on a vu que la matrice Σ apparaissant dans une telle décomposition est unique est que les valeurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}$ apparaissant sur sa diagonale sont appelées valeurs singulières de A.

Soit donc une telle décomposition en valeurs singulières (Σ, U, V) de A. On a :

$$\begin{aligned}
A^T A &= (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) \\
&= (V^T)^T \Sigma^T U^T U\Sigma V^T \\
&= V\Sigma^T (U^T U)\Sigma V^T \\
A^T A &= V\Sigma^T \Sigma V^T
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'associativité du produit matriciel, la règle donnant la transposée d'un produit matriciel en fonction des transposées des facteurs du produit et les propriétés définissant le caractère orthogonal d'une matrice.

$\Sigma^T\Sigma$ est une matrice diagonale de taille n par n dont les valeurs diagonales sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, n-m) \text{ fois}} \quad ,$$

De plus, V est une matrice orthogonale, donc inversible, avec $V^{-1} = V^T$. On a donc $A^T A = VDV^{-1}$ avec $D = \Sigma^T\Sigma$ diagonale. On en déduit que les valeurs propres de $A^T A$ sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, n-m) \text{ fois}} \quad .$$

Par un raisonnement directement analogue on obtient que $AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$ et on en déduit que les valeurs propres de AA^T sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, m-n) \text{ fois}} \quad .$$

2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres pour chacune de ces deux matrices en fonction des matrices orthogonales U et V apparaissant dans la décomposition en valeur

singulières de A.

Solution :
On déduit de la diagonalisation $A^TA = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$ que les colonnes de V forment une base de vecteurs propres de A^TA. Comme V est orthogonale, cette base est orthonormale. Par une raisonnement analogue on déduit de la diagonalisation $AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)V$ que les colonnes de U forment une base orthonormale de vecteurs propres de AA^T.

Exercice 20 Positivité des matrices symétriques et décomposition spectrale. ($\star$)

On considère une matrice symétrique réelle S. Donnez des conditions nécessaire et suffisante sur les éléments de la décomposition spectrale de S pour que S soit semi-définie positive ? Pour que S soit définie positive ?

Exercice 21 Relation d'ordre sur les matrices. ($\star$)

La relation d'ordre sur les matrices symétriques réelles proposée en cours, définit-elle un ordre total ? (C'est à dire, étant donnée deux matrices symmétriques réelles S_1 et S_2, a-t-on toujours soit $S_1 \preceq S_2$, soit $S_2 \preceq S_1$?)

Exercice 22 Vecteurs propres et valeurs propres. ($\star$)

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par m.

1. Montrez que si v est un vecteur propre de A tout produit de v par un scalaire est aussi un vecteur propre de A.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre de A, le conjugué $\bar{\lambda}$ de λ est aussi une valeur propre de A.

Exercice 23 Matrices non-diagonalisables. ($\star$)

Démontrez que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 24 Déterminant et trace. ($\star$)

1. Calculez le déterminant et la trace de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculez le déterminant de la matrice identité I_n de taille n par n en partant de la définitions formelle du déterminant.

3. Calculez le déterminant de la matrice $\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en partant de la définitions formelle du déterminant.

4. Soit P une matrice inversible de taille $m \times m$, Q une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que $\det(P^{-1}AP) = \det(Q^T AQ) = \det(A)$ et que $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(Q^T AQ) = \text{Tr}(A)$.

5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. En utilisant la décomposition de Jordan, calculez la trace et le déterminant de A en fonction de ses valeurs propres.

Exercice 25 Polynôme caractéristique. ($\star$)

1. Calculez le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifiez que le théorème de Cayley-Hamilton est vérifié dans le cadre de cet exemple.

3. Donnez le polynôme caractéristique d'une matrice de taille 2×2 quelconque en fonction de la trace et du déterminant de la matrice.

4. Montrez que le polynôme caractéristique est invariant au changement de système de coordonnées.

5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que les racines du polynôme caractéristique de A sont les valeurs propres de A avec leur multiplicité. Commencez par considérer le cas où A est diagonale, puis le cas où A est diagonalisable, puis le cas général.

Exercice 26 Ensembles de matrices. ($\star$)

1. Montrez que l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ des matrices à coefficients réels de taille m par n muni de l'addition et du produit scalaire usuel est un espace vectoriel.

2. Montrez que la dimension de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ est mn, par exemple en proposant une base canonique.

Exercice 27 Diagonalisation. ($\star$)

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Solution :

$$\chi_A(X) := \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 3 & -1-X \end{vmatrix} = (X+1)^2 - 3 = X^2 + 2X - 2$$

2. Donner les valeurs propres de A.

Solution : Les valeurs propres de A sont $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$, les racines de son polynôme caractéristique.

3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.

Solution : On cherche $v_1 := \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ et $v_2 := \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ tels que v_1 et v_2 sont non nuls, $Av_1 = (\sqrt{3}-1)v_1$ et $Av_2 = (-\sqrt{3}-1)v_2$.

On a :

$$\begin{aligned} Av_1 = (\sqrt{3}-1)v_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} -v_{11} + v_{12} = (\sqrt{3}-1)v_{11} \\ 3v_{11} - v_{12} = (\sqrt{3}-1)v_{12} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_{12} = \sqrt{3}v_{11} \\ v_{11} \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{3}-1$ sont les élements de $S_1 = \{(a, \sqrt{3}a)^T \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Par exemple, $(1, \sqrt{3})^T$ est un vecteur propres associé à $\sqrt{3}-1$.

On a aussi :

$$\begin{aligned} Av_2 = (-\sqrt{3}-1)v_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} -v_{21} + v_{22} = (-\sqrt{3}-1)v_{21} \\ 3v_{21} - v_{22} = (-\sqrt{3}-1)v_{22} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_{22} = -\sqrt{3}v_{21} \\ v_{21} \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $-\sqrt{3}-1$ sont les élements de $S_2 = \{(a, -\sqrt{3}a)^T \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Par exemple, $(1, -\sqrt{3})^T$ est un vecteur propres associé à $\sqrt{3}-1$

4. Donner une diagonalisation de A.

Solution : A est une matrice de taille 2 par 2 possédant 2 valeurs propres distinctes $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$, elle est donc diagonalisable. De plus, $(1,\sqrt{3})^T$ et $(1,-\sqrt{3})^T$ sont respectivement des vecteurs propres associés à $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$. On en déduit que $A = PDP^{-1}$, où : $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$.
Par définition, $PP^{-1} = I$, ce qu'on peut exploiter pour trouver une expression explicite pour $P^{-1} := \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$.
On a :

$$PP^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{cases} q_{11} + q_{21} = 1 \\ \sqrt{3}q_{11} - \sqrt{3}q_{21} = 0 \\ q_{12} + q_{22} = 0 \\ \sqrt{3}q_{12} - \sqrt{3}q_{22} = 1 \ . \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_{11} = q_{21} = 1/2 \\ q_{12} = \sqrt{3}/6 \\ q_{22} = -\sqrt{3}/6 \end{cases}$$

D'où : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$.

5. Calculer l'inverse de A.

Solution : A est inversible car toutes ses valeurs propres sont différentes de 0 et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

6. Calculer l'exponentielle de A.

Solution :

$$\begin{aligned} e^A &= Pe^DP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\sqrt{3}-1} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{3}-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{3}-1} + e^{-\sqrt{3}-1}\right) & \frac{\sqrt{3}}{6}\left(e^{\sqrt{3}-1} - e^{-\sqrt{3}-1}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{\sqrt{3}-1} - e^{-\sqrt{3}-1}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{3}-1} + e^{-\sqrt{3}-1}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} .$$