Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 1

Année 2025-26

Algèbre linéaire.

1 Concepts fondamentaux en algèbre linéaire

Exercice 1 Fonction linéaire. ($\star$)

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ x, y & \mapsto & x+y, x-y \end{array} \right.$$

Montrez que f est linéaire.

Exercice 2 Espaces vectoriels fonctionnels. ($\star\star$)

1. Proposez une notion d'addition et de produit scalaire naturelle sur l'espace $C^0([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$
2. Prouvez que les notions d'addition et de produit scalaire proposées munissent bien de $C^0([a,b],\mathbf{R})$ d'une structure d'espace vectoriel.
3. On considère la fonction e_x qui évalue une fonction continue en un point $x \in \mathbf{R}$:

$$e_x : \left| \begin{array}{ccc} C^0([a,b],\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Prouvez que e_x est linéaire.

Exercice 3 Notions élémentaires. ($\star$)

1. Décrivez en language naturel l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,1,0)$ et $(3,3,0)$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelle est la dimension de cet espace ?
3. Les vecteurs $(3,2)$ et $(6,4)$ de $\mathbf{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants ?
4. Qu'en est-il des vecteurs $(3,2,1)$ et $(6,4,0)$ de $\mathbf{R}^3$?
5. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle libre ?

6. Est-ce que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$?

7. Est-ce que de $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?

8. Démontrer par l'absurde le théorème sur la dimension d'un espace vectoriel vu en cours.

Exercice 4 Représentation matricielle des applications linéaires. ($\star$)

1. Donnez la matrice de l'application $f : x, y \mapsto y, 3x + y$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

2. Utilisez cette matrice pour trouver $f(6, 17)$.

3. A l'aide d'un produit matriciel, obtenez la matrice de la composée de f avec $g : x, y \mapsto x+y$.

4. Même question pour la composée de f avec $h_y : x \mapsto x + y$.

Exercice 5 Changement de système de coordonnées. ($\star$)

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.

2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, alors $P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.

3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B.

Exercice 6 Représentation matricielles d'opérations linéaires sur les polynômes. ($\star\star$)

On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \mapsto & f(P) = (a_2 + a_0)X^3 + a_1 X^2 + a_0 \end{array} \right.$$

et les bases canoniques $V = (1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ et $W = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

1. Montrez que f est linéaire.

2. Donnez la matrice $M(f, V, W)$.

3. A l'aide de cette matrice, évaluez $f(X^2 - 3X + 1)$

Exercice 7 Différentes visions des opérations matricielles. ($\star$)

1. Écrire le produit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;

(b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.

2. Écrire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

(a) comme deux produits matrice-vecteur ;

(b) comme deux produits vecteur-matrice ;

(c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;

(d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Exercice 8 Matrix product with diagonal matrix. ($\star$)

On note $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la matrice $\begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{bmatrix}$ with all the off-diagonal coefficients equal to zero.

1. Express the matrix product $A\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in terms of the columns of A and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
2. Express the matrix product $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)B$ in terms of the lines of B and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Exercice 9 Matrices nilpotentes. ($\star\star$)

Soit N une matrice nilpotente de taille n par n (c'est à dire qu'il existe un entier p strictement positif, tel que $N^p = 0$). On définit $q := \inf\{r \mid N^r = 0, r \in \mathbf{N}, r > 0\}$ l'indice de nilpotence de N.

1. Montrer que $q \leq n$. Indice : par un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il existe une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ est une famille libre et conclure.
2. Soit A et B deux matrices de taille n par n qui commutent (c'est à dire qu'on a $AB = BA$) et soit k un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer l'identité remarquable :

$$A^k - B^k = (A - B) \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B^i \right).$$

3. À l'aide d'un choix judicieux de A, B et k, montrer que $I - N$ est inversible et donner son inverse.

4. Soit a un nombre réel. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice de taille n par n :

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Algèbre linéaire : orthogonalité

Exercice 10 Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$. ($\star$)

Prouvez que la fonction

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x, y \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 11 Matrices orthogonales. ($\star$)

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ les coordonnées de n vecteurs de dimensions d dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$.

1. On suppose que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, calculez le produit matriciel $[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$, où on a considéré les v_i comme des matrices colonnes.
2. Même question, si on suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux.
3. Montrez que pour une matrice carrée A, s'il existe une matrice carrée B, telle que $AB = I$, alors on a aussi $BA = I$.
4. On suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux et que $n = d$. Montrez que la matrice $[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$ est inversible et donnez son inverse.

Exercice 12 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et décomposition QR. ($\star$)

On considère le vecteur de v_1 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(3, 1)$ et le vecteur v_2 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(2, 2)$.

1. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (v_1, v_2).

2. En déduire une décomposition de la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

commme un produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 13 Validité du processus de Gram-Schmidt. ($\star\star$)

Etant donnés un espace vectoriel E et un produit scalaire $(.|.)$ quelconques (possiblement en dimension infinie), prouvez par récurrence que la famille de vecteurs produite par le processus de Gram-Schmidt est orthonormale.

Exercice 14 Polynômes orthogonaux. ($\star\star\star$)

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif d et des nombres réels a_0, a_1, $\ldots$, a_d, tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.

2. Montrer que :

$$(.\,|\,.) : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

3. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(.\,|\,.)$ et telle que pour tout entier positif n, le degré de P_n est n et le coefficient d'ordre n de P_n est strictement positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.

4. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$?

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (a_n X + b_n)P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X),$$

pour des suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (c_n) qu'on explicitera.

3 Algèbre linéaire : structure des applications linéaires

Exercice 15 Propriétés élémentaires de la décomposition en valeurs singulières. ($\star$)

Indice : dans le cadre de cet exercice, pensez aux différentes interprétations des produits matrice-matrice et matrice-vecteurs que nous avons vu en cours.

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par n. Le théorème sur la décomposition en valeurs singulières indique qu'il existe une matrice orthogonale $U = [u_1\ u_2\ \dots\ u_m]$ de taille m par m, une matrice orthogonale $V = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$ de taille n par n, un entier naturel $r \leq \min(m, n)$ et une matrice diagonale $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ de taille m par n, tels que toutes les matrices sont à coefficients réels, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ et $AV = U\Sigma$.

1. Montrez que $A = U\Sigma V^T$ et que $\Sigma = U^T AV$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \dots, r\}$, $Av_i = \sigma_i u_i$.
3. Montrez que pour tout i dans $\{r + 1, r + 2, \dots, n\}$, $Av_i = 0$, i.e. $v_i \in \text{Ker}A$.
4. Montrez que $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$.

Exercice 16 Dérivation des théorèmes fondamentaux de l'algèbre linéaire à partir de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

On considère le même point de départ que dans l'exercice précédent (décomposition en valeur singulière d'une matrice A).

1. Montrez que les r premières colonnes de U forment une base orthonormale de l'image de A.
2. Montrez que les $m - r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale du co-noyau de A (i.e. le noyau de A^T).
3. Montrez que les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de la co-image de A (i.e. l'image de A^T).
4. Montrez que les $n - r$ dernières colonnes de V forment une base orthonormale du noyau de A.
5. Montrez que le noyau et la co-image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire qu'on peut décomposer tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ de manière unique en une somme de deux vecteurs orthogonaux, l'un appartenant au noyau de A et l'autre appartenant à la co-image de A.

6. Montrez que le co-noyau et l'image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^m$.
7. Montrez qu'il existe un unique entier naturel $r \leq \min(m, n)$, le range de A, tel que l'image et la co-image de A sont de même dimension r.
8. Montrez que l'entier r de la question précédente est aussi la dimension de l'image de toute application linéaire $f : E \to F$ telle qu'il existe des bases B_E et B_F de E et F telles que $A = M(f, B_E, B_F)$.
9. Montrez que la matrice A est inversible—c'est à dire qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$—si et seulement si $r = m = n$ et donnez une expression pour A^{-1} en fonction de U, Σ et V.

Exercice 17 Décomposition en valeurs singulières des matrices orthogonales. ($\star$)

Déterminez les valeurs singulières d'une matrice orthogonale.

Exercice 18 Propriétés élémentaires de la décomposition spectrale. ($\star$)

Soit S une matrice à coefficients réels de taille m par m symmétrique. Le théorème spectral indique qu'il existe une matrice orthogonale réelle $Q = [q_1 \; q_2 \; \dots q_m]$ de taille m par m et une matrice diagonale réelle $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ de taille m par m, telles que $S = Q\Lambda Q^T$.

1. Montrez que $\Lambda = Q^T SQ$ et que $SQ = Q\Lambda$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n\}$, $Sq_i = \lambda_i q_i$.
3. Montrez que $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$.
4. Proposez une interprétation intuitive du résultat du produit matrice vecteur Sv en vous appuyant sur la réponse à la question précédente.
5. On considère un polynôme P. Calculer $P(S)$ en fonction de Q et Λ.

Exercice 19 Éléments propres de $A^T A$ et AA^T. ($\star$)

1. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.
2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres pour chacune de ces deux matrices en fonction des matrices orthogonales U et V apparaissant dans la décomposition en valeur singulières de A.

Exercice 20 Positivité des matrices symmétriques et décomposition spectrale. ($\star$)

On considère une matrice symmétrique réelle S. Donnez des conditions nécessaire et suffisante sur les éléments de la décomposition spectrale de S pour que S soit semi-définie positive ? Pour que S soit définie positive ?

Exercice 21 Relation d'ordre sur les matrices. ($\star$)

La relation d'ordre sur les matrices symmétriques réelles proposée en cours, définit-elle un ordre total ? (C'est à dire, étant donnée deux matrices symmétriques réelles S_1 et S_2, a-t-on toujours soit $S_1 \preceq S_2$, soit $S_2 \preceq S_1$?)

Exercice 22 Vecteurs propres et valeurs propres. ($\star$)

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par m.

1. Montrez que si v est un vecteur propre de A tout produit de v par un scalaire est aussi un vecteur propre de A.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre de A, le conjugué $\bar{\lambda}$ de λ est aussi une valeur propre de A.

Exercice 23 Matrices non-diagonalisables. ($\star$)

Démontrez que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 24 Déterminant et trace. ($\star$)

1. Calculez le déterminant et la trace de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculez le déterminant de la matrice identité I_n de taille n par n en partant de la définitions formelle du déterminant.
3. Calculez le déterminant de la matrice $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en partant de la définitions formelle du déterminant.
4. Soit P une matrice inversible de taille $m \times m$, Q une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que $\det(P^{-1}AP) = \det(Q^T AQ) = \det(A)$ et que $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(Q^T AQ) = \mathrm{Tr}(A)$.

5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. En utilisant la décomposition de Jordan, calculez la trace et le déterminant de A en fonction de ses valeurs propres.

Exercice 25 Polynôme caractéristique. ($\star$)

1. Calculez le polynôme caractéristique de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Vérifiez que le théorème de Cayley-Hamilton est vérifié dans le cadre de cet exemple.
3. Donnez le polynôme caractéristique d'une matrice de taille 2×2 quelconque en fonction de la trace et du déterminant de la matrice.
4. Montrez que le polynôme caractéristique est invariant au changement de système de coordonnées.
5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que les racines du polynôme caractéristique de A sont les valeurs propres de A avec leur multiplicité. Commencez par considérer le cas où A est diagonale, puis le cas où A est diagonalisable, puis le cas général.

Exercice 26 Ensembles de matrices. ($\star$)

1. Montrez que l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ des matrices à coefficients réels de taille m par n muni de l'addition et du produit scalaire usuel est un espace vectoriel.
2. Montrez que la dimension de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ est mn, par exemple en proposant une base canonique.

Exercice 27 Diagonalisation. ($\star$)

On considère la matrice
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner les valeurs propres de A.
3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.
4. Donner une diagonalisation de A.
5. Calculer l'inverse de A.
6. Calculer l'exponentielle de A.