Aix*Marseille université	Master 2 informatique Parcours IAAA, UE MIA
Année 2024-25	**Test de positionnement**

Le but de ce test de positionnement est de situer votre niveau pour adapter le contenu du cours et identifier d'éventuelles lacunes à compenser. Il sera corrigé, mais pas noté.

Si vous avez suivi le M1 informatique d'AMU, veuillez indiquer sur votre copie les notes que vous avez obtenues aux UEs « Méthodes Numériques pour l'Informatique » et « Aspects Probabilistes en Informatique. »

Exercice 1 Language logico-mathématique.

Donnez la négation de la proposition : $\forall x, \exists y, P(x, y)$.

Solution : $\exists x, \forall y, \text{not}(P(x, y))$.

Exercice 2 Preuves.

Déterminez si la proposition est vraie ou fausse et donnez en une preuve.

1. La somme de deux nombres entiers impairs est paire.

Solution : La proposition est vraie. En effet, considérons deux nombres entiers impairs a_1 et a_2. Comme ils sont impairs, par définition il existe deux nombre entiers k_1 et k_2, tels que $a_1 = 2k_1 + 1$, $a_2 = 2k_2 + 1$.
On en déduit que $a_1 + a_2 = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 2 = 2(k_1 + k_2 + 1) = 2x$ où $x := k_1 + k_2 + 1$ est un nombre entier, puisqu'il est la somme de trois nombres entiers. On obtient donc que $a_1 + a_2$ vérifie la définition formelle de ce que c'est qu'être un nombre pair. On a donc bien démontré que la somme de deux nombre entiers impairs est paire.

Exercice 3 Optimisation.

1. Donnez une expression pour le gradient de $f_1 : x_1, x_2 \mapsto x_1^3 + x_2^3 - 6(x_1^2 - x_2^2)$, où $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2$.

   Solution :
   $$\nabla f_1 : x_1, x_2 \mapsto 3x_1^2 - 12x_1, 3x_2^2 + 12x_2$$

2. Trouvez les points critiques de f_1 (où le gradient s'annule).

   Solution : $\nabla f_1(x_1, x_2) = 0$ is equivalent to $3x_1^2 = 12x_1$ et $3x_2^2 = -12x_2$. La première équation a pour solution $x_1 = 0$ et $x_1 = 4$, la seconde a pour solution $x_2 = 0$ et $x_2 = -4$, il y a donc quatre points critiques : $(0, 0)$, $(0, -4)$, $(4, 0)$ et $(4, -4)$

3. Combien f_1 possède-t-elle de minima locaux ?

Solution : Il s'agissait d'une question piège pour voir qui répondrait « 4 ». Les points critiques ne sont pas nécessairement des minima locaux. Nous verrons des éléments permettant de répondre à cette question précisémment dans le cours.

4. Donnez une expression pour le gradient de $f_2 : x \mapsto \|x\|_2^2$, où $x \in \mathbf{R}^n$.

Solution : $\|x\|_2^2 = x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2$. On en déduit que

$$\nabla f_2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix} = 2x$$

Exercice 4 Algèbre linéaire.

1. Calculez le produit scalaire de $(1, 2, -1, 0)$ et $(3, -1, 1, 2)$

Solution :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 - 1 + 0 = 0$$

2. Que nous apprend le résultat sur ces deux vecteurs ?

Solution : Qu'ils sont orthogonaux.

3. Qu'est-ce qu'une matrice orthogonale ?

Solution : Une matrice orthogonale est une matrice carrée M à coefficients réels, telle que $M^T M = I$. En d'autres termes les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée.

4. Qu'est-ce qu'une matrice positive ?

Solution : Une matrice positive est une matrice carrée M à coefficients réels, symmétrique et telle que pour tout vecteur de réels x de dimension compatible avec M, $x^T M x \geq 0$. Une définition équivalente est la suivante : une matrice positive est une matrice carrée M à coefficients réels, symmétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles (elles sont forcément réelles du fait de la symmétrie et du caractère réel des coefficients qui permettent d'appliquer le théorème spectral).

5. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.

Solution : On sait qu'il existe une décomposition en valeurs singulières de A, c'est à dire qu'il existe une matrice orthogonale U de taille $m \times m$, une matrice orthogonale V de taille $n \times n$ et une matrice rectangulaire diagonale Σ de taille $m \times n$ dont les $\min(m, n)$ valeurs diagonales sont rangées en ordre décroissant et positives, telles que $A = U\Sigma V^T$. De plus, on a vu que la matrice Σ apparaissant dans une telle décomposition est unique est que les valeurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}$ apparaissant sur sa diagonale sont appelées valeurs singulières de A.

Soit donc une telle décomposition en valeurs singulières (Σ, U, V) de A. On a :

$$\begin{aligned} A^T A &= (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) \\ &= (V^T)^T \Sigma^T U^T U \Sigma V^T \\ &= V\Sigma^T (U^T U)\Sigma V^T \\ A^T A &= V\Sigma^T \Sigma V^T \end{aligned}$$

où on a utilisé l'associativité du produit matriciel, la règle donnant la transposée d'un produit matriciel en fonction des transposées des facteurs du produit et les propriétés définissant le caractère orthogonal d'une matrice.

$\Sigma^T \Sigma$ est une matrice diagonale de taille n par n dont les valeurs diagonales sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, n-m) \text{ fois}} \quad ,$$

De plus, V est une matrice orthogonale, donc inversible, avec $V^{-1} = V^T$. On a donc $A^T A = V D V^{-1}$ avec $D = \Sigma^T \Sigma$ diagonale. On en déduit que les valeurs propres de $A^T A$ sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, n-m) \text{ fois}} \quad .$$

Par un raisonnement directement analogue on obtient que $AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$ et on en déduit que les valeurs propres de AA^T sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, m-n) \text{ fois}} \quad .$$

Exercice 5 Probabilités.

1. On considère une variable aléatoire $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbf{R}^3$ de loi gaussienne multivariée

$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ avec $\mu = (1, -1, 0)$ et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 2 & 0.66 \\ 0.2 & 0.66 & 10 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la covariance entre X_1 et X_3 ?

Solution : La covariance se lit directement dans la matrice de covariance ligne 1, colonne 3 (ou de manière équivalente, colonne 3, ligne 1). Elle est de 0.2.

2. On considère à présent une variable aléatoire binaire Z et deux variables aléatoires réelles X et Y telles que $P(X, Y, Z) = P(X|Z)P(Y|Z)P(Z)$ avec

   (a) $P(Z = 1) = 2/3$

   (b) $P(X|Z = 0) = \mathcal{N}(X; 0, 1)$

   (c) $P(X|Z = 1) = \mathcal{N}(X; 1, 1)$

   (d) $P(Y|Z = 0) = \mathcal{N}(Y; 0, 1)$

   (e) $P(Y|Z = 1) = \mathcal{N}(Y; -1, 1)$

   où

   $$\mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   est la densité d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2. On suppose qu'on observe $Y = y_0$. Calculez $P(X|Y = y_0)$.

Solution : On souhaite calculer la probabilité conditionnelle $P(X|Y = y_0)$.

Étape 1 : Connection avec la loi jointe

En utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle, on peut écrire :

$$P(X|Y = y_0) = \frac{P(X, Y = y_0)}{P(Y = y_0)}$$

où $P(X, Y = y_0)$ s'obtient en marginalisant la loi jointe par rapport à Z pour $Y = y_0$ et un X arbitraire :

$$P(X, Y = y_0) = \sum_{z \in \{0,1\}} P(X, Y = y_0, Z = z)$$

et $P(Y = y_0)$ s'obtient à partir de $P(X|Y = y_0)$ en marginalisant sur X :

$$P(Y = y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X, Y = y_0)\, dX$$

Remarquez qu'en utilisant la définition des probabilités conditionnelles, on a réussi à connecter le calcul de la quantité désirée à de simples opérations de marginalisation de la loi jointe, plus le calcul d'expression algébriques simples (ici un quotient). Cette approche est toujours possible en calcul probabiliste et je vous encourage à la suivre systématiquement.

(solution continuée ci-après)

Solution : (suite de la solution)

Étape 2 : Calcul de $P(X, Y = y_0)$

En utilisant le fait que $P(X, Y, Z) = P(X|Z)P(Y|Z)P(Z)$, on obtient :

$$P(X, Y = y_0) = \sum_{z \in \{0,1\}} P(X|Z = z)P(Y = y_0|Z = z)P(Z = z)$$

On dispose des informations suivantes :

- $P(Z = 1) = \frac{2}{3}$, donc $P(Z = 0) = \frac{1}{3}$
- $P(X|Z = 0) = \mathcal{N}(X; 0, 1)$
- $P(X|Z = 1) = \mathcal{N}(X; 1, 1)$
- $P(Y = y_0|Z = 0) = \mathcal{N}(y_0; 0, 1)$
- $P(Y = y_0|Z = 1) = \mathcal{N}(y_0; -1, 1)$

On peut maintenant insérer ces termes dans l'expression pour $P(X, Y = y_0)$ et obtenir :

$$P(X, Y = y_0) = \frac{1}{3}\mathcal{N}(X; 0, 1)\mathcal{N}(y_0; 0, 1) + \frac{2}{3}\mathcal{N}(X; 1, 1)\mathcal{N}(y_0; -1, 1)$$

(solution continuée ci-après)

Solution : (suite de la solution)

Étape 3 : Calcul de $P(Y = y_0)$

Ensuite, on calcule $P(Y = y_0)$ en marginalisant sur X l'expression qu'on vient d'obtenir :

$$\begin{aligned}
P(Y = y_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X, Y = y_0) dX \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\mathcal{N}(X; 0, 1)\mathcal{N}(y_0; 0, 1) + \frac{2}{3}\mathcal{N}(X; 1, 1)\mathcal{N}(y_0; -1, 1) \right) dX \\
&= \frac{1}{3}\mathcal{N}(y_0; 0, 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(X; 0, 1) dX + \frac{2}{3}\mathcal{N}(y_0; -1, 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(X; 1, 1) dX
\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale.

Comme une densité de probabilité somme toujours à 1, c'est aussi le cas pour une densité Gaussienne et donc :

$$P(Y = y_0) = \frac{1}{3}\mathcal{N}(y_0; 0, 1) + \frac{2}{3}\mathcal{N}(y_0; -1, 1).$$

Étape 4 : Conclusion

L'expression finale obtenue pour $P(X|Y = y_0)$ est :

$$P(X|Y = y_0) = \frac{\frac{1}{3}\mathcal{N}(X; 0, 1)\mathcal{N}(y_0; 0, 1) + \frac{2}{3}\mathcal{N}(X; 1, 1)\mathcal{N}(y_0; -1, 1)}{\frac{1}{3}\mathcal{N}(y_0; 0, 1) + \frac{2}{3}\mathcal{N}(y_0; -1, 1)}.$$

Exercice 6 Statistique.

1. Calculer le biais et la variance de l'estimateur de la moyenne empirique $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ pour des variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi P. On suppose que les deux premiers moments de P existent et on note $\mu := \mathbf{E}(P)$ et $\sigma^2 := \mathbf{Var}(P)$.

Solution : Nous devons calculer le biais et la variance de l'estimateur de la moyenne empirique

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles i.i.d. suivant une loi P. On suppose que les deux premiers moments de P existent, et on note $\mu := \mathbb{E}(P)$ et $\sigma^2 := \mathrm{Var}(P)$.

Calcul du biais

Le biais de l'estimateur $\hat{\mu}$ est défini par :

$$\mathrm{Biais}(\hat{\mu}) = \mathbb{E}[\hat{\mu}] - \mu$$

Calculons $\mathbb{E}[\hat{\mu}]$:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$$

où l'on a utilisé la linéarité de l'espérance.

Puisque $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont identiquement distribuées et que $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, nous avons :

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

Ainsi, le biais de $\hat{\mu}$ est :

$$\mathrm{Biais}(\hat{\mu}) = \mu - \mu = 0$$

Donc, l'estimateur $\hat{\mu}$ est non biaisé.

(solution continuée ci-après)

Solution : (suite de la solution)

Calcul de la variance

La variance de $\hat{\mu}$ est donnée par :

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \mathbb{E}[(\hat{\mu} - \mathbb{E}[\hat{\mu}])^2] = \mathbb{E}[\hat{\mu}^2] - (\mathbb{E}[\hat{\mu}])^2$$

Commençons par calculer $\mathbb{E}[\hat{\mu}^2]$:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]$$

Développons le carré :

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}^2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j\right]$$

En utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que X_i et X_j sont indépendants pour $i \neq j$, on obtient :

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2] + \frac{2}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$$

Puisque $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ et $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2 + \mu^2$ (cette dernière égalité découlant de : $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \mathbb{E}[X_i^2] - \mu^2$), nous avons :

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}^2] = \frac{1}{n^2} \cdot n(\sigma^2 + \mu^2) + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \mu^2$$

Cela se simplifie en :

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}^2] = \frac{1}{n}(\sigma^2 + \mu^2) + \frac{n-1}{n}\mu^2$$

Donc :

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Enfin, la variance de $\hat{\mu}$ est :

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \mathbb{E}[\hat{\mu}^2] - (\mathbb{E}[\hat{\mu}])^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

(solution continuée ci-après)

Solution : (suite de la solution)

Conclusion

— Le biais de l'estimateur $\hat{\mu}$ est nul : $\text{Biais}(\hat{\mu}) = 0$.

— La variance de l'estimateur $\hat{\mu}$ est : $\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Exercice 7 Différentes visions des opérations matricielles.

1. Écrire le produit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;

   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.

2. Écrire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme deux produits matrice-vecteur ;

   (b) comme deux produits vecteur-matrice ;

   (c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;

   (d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Solution :

1. (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T c \\ b^T c \end{pmatrix},$$

où : $a := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ et $c := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

2. Notons C le produit matriciel considéré dans cette question.

   (a) On a :

$$C = \begin{pmatrix} Ab & Ac \end{pmatrix},$$

où : $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $c := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$.

   (b) On a aussi :

$$C = \begin{pmatrix} bA \\ cA \end{pmatrix},$$

où : $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $c := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution :

2. (c) On a également :

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Et finalement :

$$C = \begin{pmatrix} a^T c & a^T d \\ b^T c & b^T d \end{pmatrix},$$

où : $a := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $c := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $d := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Exercice 8 Représentation matricielle des applications linéaires.

1. Donnez la matrice de l'application $f : x, y \mapsto y, 3x + y$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Utilisez cette matrice pour calculer $f(6, 17)$.

Solution :

1. Calcul de la matrice de l'application f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$:

   Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, 3x + y)$.

   Pour obtenir la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$, nous appliquons f aux vecteurs de la base canonique $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

   - $f(1, 0) = (0, 3)$ - $f(0, 1) = (1, 1)$

   Ainsi, les colonnes de la matrice de f sont les images des vecteurs de la base canonique :

   $$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donc, la matrice de f dans la base canonique est :

   $$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcul de $f(6, 17)$ à l'aide de la matrice :

   Nous voulons maintenant calculer $f(6, 17)$ en utilisant la matrice A_f. Nous multiplions la matrice A_f par le vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$:

   $$f(6, 17) = A_f \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

   Effectuons le calcul :

   $$f(6, 17) = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 + 1 \cdot 17 \\ 3 \cdot 6 + 1 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 + 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 35 \end{pmatrix}$$

   Donc, $f(6, 17) = (17, 35)$.

Exercice 9 Changement de système de coordonnées.

On note $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.

Solution : $\mathbb{R}^2$ est un ($\mathbb{R}$-)espace vectoriel de dimension 2 et B est une famille de 2 éléments de $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de montrer que B est une famille libre, c'est à dire que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda_1 (3e_1 - 2e_2) + \lambda_2 (e_1 + e_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Soient λ_1, λ_2 deux nombres réels. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (3e_1 - 2e_2) + \lambda_2 (e_1 + e_2) = 0 &\Leftrightarrow (3\lambda_1 + \lambda_2) e_1 + (\lambda_2 - 2\lambda_1) e_2 = 0 && (1)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases} && (2)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -3\lambda_1 \\ -5\lambda_1 = 0 \end{cases} && (3)\\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, && (4)
\end{aligned}$$

où en (1) on a utilisé les propriétés élémentaires des opérations sur un espace vectoriel, en (2) on a utilisé le fait que $(e_1,\, e_2)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$, est une base et en (3) et (4) on a effectué des manipulations élémentaires sur un système d'équations dont les inconnues sont des nombres réels.

2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1e_1 + v_2e_2$, alors $P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.

Solution : Notons $a_1 := 3e_1 - 2e_2$ et $a_2 := e_1 + e_2$. Comme nous l'avons montré en cours, la matrice de changement de base $P = (p_{i,j})_{1\leq i\leq 2, 1\leq j\leq 2}$ retournant les coordonnées d'un vecteur dans la base (a_1, a_2) quand on l'applique aux coordonnées de ce vecteur dans la base (e_1, e_2) est telle que $\begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \end{pmatrix}$ sont respectivement les coordonnées de e_1 et de e_2 dans la base (a_1, a_2).

Or :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ a_2 = e_1 + e_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 5e_1 \\ a_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \\ e_2 = a_2 - \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \\ e_2 = \frac{1}{5}[-a_1 + 3a_2] \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

Donc :

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B et utilisez un dessin pour vérifier la plausibilité du résultat.

Solution : Les coordonnées de v dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc ses coordonnées dans la base B sont $P\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 Diagonalisation.

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Solution :

$$\chi_A(X) := \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -1 - X & 1 \\ 3 & -1 - X \end{vmatrix} = (X + 1)^2 - 3 = X^2 + 2X - 2$$

2. Donner les valeurs propres de A.

Solution : Les valeurs propres de A sont $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$, les racines de son polynôme caractéristique.

3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.

Solution : On cherche $v_1 := \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ et $v_2 := \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ tels que v_1 et v_2 sont non nuls, $Av_1 = (\sqrt{3}-1)v_1$ et $Av_2 = (-\sqrt{3}-1)v_2$.

On a :

$$Av_1 = (\sqrt{3}-1)v_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -v_{11} + v_{12} = (\sqrt{3}-1)v_{11} \\ 3v_{11} - v_{12} = (\sqrt{3}-1)v_{12} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{12} = \sqrt{3}v_{11} \\ v_{11} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{3}-1$ sont les élements de $S_1 = \{(a, \sqrt{3}a)^T \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Par exemple, $(1, \sqrt{3})^T$ est un vecteur propres associé à $\sqrt{3}-1$.

On a aussi :

$$Av_2 = (-\sqrt{3}-1)v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -v_{21} + v_{22} = (-\sqrt{3}-1)v_{21} \\ 3v_{21} - v_{22} = (-\sqrt{3}-1)v_{22} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{22} = -\sqrt{3}v_{21} \\ v_{21} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $-\sqrt{3}-1$ sont les élements de $S_2 = \{(a, -\sqrt{3}a)^T \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Par exemple, $(1, -\sqrt{3})^T$ est un vecteur propres associé à $\sqrt{3}-1$

4. Donner une diagonalisation de A.

Solution : A est une matrice de taille 2 par 2 possédant 2 valeurs propres distinctes $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$, elle est donc diagonalisable. De plus, $(1,\sqrt{3})^T$ et $(1,-\sqrt{3})^T$ sont respectivement des vecteurs propres associés à $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$. On en déduit que $A = PDP^{-1}$, où : $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$.

Par définition, $PP^{-1} = I$, ce qu'on peut exploiter pour trouver une expression explicite pour $P^{-1} := \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$.

On a :

$$PP^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{cases} q_{11} + q_{21} = 1 \\ \sqrt{3}q_{11} - \sqrt{3}q_{21} = 0 \\ q_{12} + q_{22} = 0 \\ \sqrt{3}q_{12} - \sqrt{3}q_{22} = 1 \end{cases} .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_{11} = q_{21} = 1/2 \\ q_{12} = \sqrt{3}/6 \\ q_{22} = -\sqrt{3}/6 \end{cases}$$

D'où : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$.

5. Calculer l'inverse de A.

Solution : A est inversible car toutes ses valeurs propres sont différentes de 0 et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.