Aix*Marseille université	Master 2 informatique Parcours IAAA, UE MIA
Année 2024-25	**Test de positionnement**

Le but de ce test de positionnement est de situer votre niveau pour adapter le contenu du cours et identifier d'éventuelles lacunes à compenser. Il sera corrigé, mais pas noté.

Si vous avez suivi le M1 informatique d'AMU, veuillez indiquer sur votre copie les notes que vous avez obtenues aux UEs « Méthodes Numériques pour l'Informatique » et « Aspects Probabilistes en Informatique. »

Exercice 1 Language logico-mathématique.

Donnez la négation de la proposition : $\forall x, \exists y, P(x, y)$.

Exercice 2 Preuves.

Déterminez si la proposition est vraie ou fausse et donnez en une preuve.

1. La somme de deux nombres entiers impairs est paire.

Exercice 3 Optimisation.

1. Donnez une expression pour le gradient de $f_1 : x_1, x_2 \mapsto x_1^3 + x_2^3 - 6(x_1^2 - x_2^2)$, où $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2$.
2. Trouvez les points critiques de f_1 (où le gradient s'annule).
3. Combien f_1 possède-t-elle de minima locaux ?
4. Donnez une expression pour le gradient de $f_2 : x \mapsto \|x\|_2^2$, où $x \in \mathbf{R}^n$.

Exercice 4 Algèbre linéaire.

1. Calculez le produit scalaire de $(1, 2, -1, 0)$ et $(3, -1, 1, 2)$
2. Que nous apprend le résultat sur ces deux vecteurs ?
3. Qu'est-ce qu'une matrice orthogonale ?
4. Qu'est-ce qu'une matrice positive ?
5. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.

Exercice 5 Probabilités.

1. On considère une variable aléatoire $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbf{R}^3$ de loi gaussienne multivariée $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ avec $\mu = (1, -1, 0)$ et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 2 & 0.66 \\ 0.2 & 0.66 & 10 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la covariance entre X_1 et X_3 ?

2. On considère à présent une variable aléatoire binaire Z et deux variables aléatoires réelles X et Y telles que $P(X, Y, Z) = P(X|Z)P(Y|Z)P(Z)$ avec

   (a) $P(Z = 1) = 2/3$

   (b) $P(X|Z = 0) = \mathcal{N}(X; 0, 1)$

   (c) $P(X|Z = 1) = \mathcal{N}(X; 1, 1)$

   (d) $P(Y|Z = 0) = \mathcal{N}(Y; 0, 1)$

   (e) $P(Y|Z = 1) = \mathcal{N}(Y; -1, 1)$

   où

$$\mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

est la densité d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2. On suppose qu'on observe $Y = y_0$. Calculez $P(X|Y = y_0)$.

Exercice 6 Statistique.

1. Calculer le biais et la variance de l'estimateur de la moyenne empirique $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour des variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi P. On suppose que les deux premiers moments de P existent et on note $\mu := \mathbf{E}(P)$ et $\sigma^2 := \mathbf{Var}(P)$.

Exercice 7 Différentes visions des opérations matricielles.

1. Écrire le produit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;

   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.

2. Écrire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme deux produits matrice-vecteur ;

   (b) comme deux produits vecteur-matrice ;

   (c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;

   (d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Exercice 8 Représentation matricielle des applications linéaires.

1. Donnez la matrice de l'application $f : x, y \mapsto y, 3x + y$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Utilisez cette matrice pour calculer $f(6, 17)$.

Exercice 9 Changement de système de coordonnées.

On note $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1e_1 + v_2e_2$, alors $P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.
3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B et utilisez un dessin pour vérifier la plausibilité du résultat.

Exercice 10 Diagonalisation.

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner les valeurs propres de A.
3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.
4. Donner une diagonalisation de A.
5. Calculer l'inverse de A.