Résumé Complet du Contenu de CM34

Ibtihal ANNAKI, Clara KARKACH, Kossi KOSSIVI

October 1, 2024

1 Optimisation

L'optimisation qui est une branche des mathématiques consistant à trouver une solution *optimale* à un problème, est divisée en deux grandes catégories :

- **Optimisation sans contraintes** : recherche des points critiques d'une fonction pour déterminer ses minimums ou maximums globaux.
- **Optimisation sous contraintes** : consiste à résoudre des problèmes où certaines contraintes sont imposées, souvent à l'aide des multiplicateurs de Lagrange et des méthodes de dualité.

1.1 Quelques rappels et proprietés sur la convexité

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si, pour tous $x, y \in X$, le segment reliant x et y est inclus dans X :

$$\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subseteq X$$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est convexe si X est convexe et si, pour tous $x, y \in X$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Si l'inégalité est stricte, la fonction est dite strictement convexe.

1.1.1 Reconnaître une fonction convexe

- Les fonctions linéaires sont convexes.
- Les combinaisons linéaires positives de fonctions convexes sont convexes.
- Le maximum (point par point) d'un ensemble de fonctions convexes est également convexe.

Si f est de classe C^2, alors f est convexe si et seulement si la matrice hessienne $\nabla^2 f$ est semi-définie positive sur l'intérieur de X. Si $\nabla^2 f$ est définie positive, f est strictement convexe.

On rappelle qu'une matrice A est sémie-définie positive si pour tout vecteur x non nul, $x^T Ax \leq 0$. La matrice A est définie positive si l'inégalité est stricte.

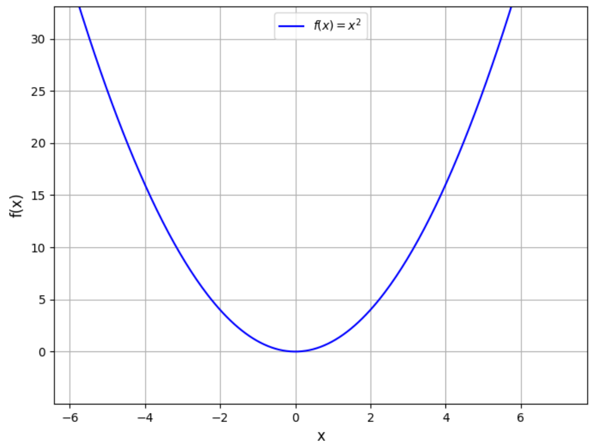

Figure 1: Graphe de la fonction convexe $f(x) = x^2$

1.2 Existence et unicité du minimum

Si f est convexe sur X, alors tout minimum local de f est aussi un minimum global de f. Si X est ouvert alors $\nabla f(x^*) = 0$ et donc le minimum global de f est x^*.
Si f est convexe et minorée, alors f admet un minimum global. Ce minimum global est l'unique minimum global de f si celle-ci est strictement convexe.

2 Dualité

La dualité est un concept central en optimisation sous contraintes. Elle permet de résoudre des problèmes en reformulant le problème primal en un problème dual. La solution du problème dual permet d'obtenir une borne pour la solution du problème primal.

2.1 Problème primal et dual

- Le problème primal consiste à minimiser une fonction $f(x)$ sous des contraintes $g_j(x) \leq 0$.
- Le problème dual est basé sur la maximisation d'une fonction duale associée aux multiplicateurs de Lagrange.
- Le Lagrangien associé au problème primal est :

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_j \mu_j g_j(x), \quad \mu_j \geq 0$$

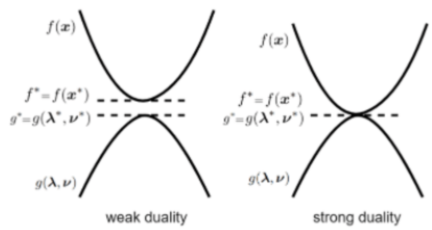

Figure 2: Illustration graphique de la notion de dualité forte et faible. *source: https://dsaint31.tistory.com/562*

- La fonction duale $q(\mu)$ est définie comme :

$$q(\mu) = \inf_x L(x, \mu)$$

  Le problème dual consiste à maximiser $q(\mu)$ sous les contraintes $\mu_j \geq 0$.

2.2 Dualité forte et qualification des contraintes

- Dualité faible: $q^* \leq f^*$
- Si la fonction f est convexe et que les contraintes g_j sont linéaires, il n'y a pas d'écart dual :

$$q^* = f^*$$

- Si les conditions de la dualité forte sont respectées, on a :

$$L(x^*, \mu^*) = f^* = q^*$$

  Cela signifie que la solution (x^*, μ^*) est optimale pour le problème primal et le problème dual.

3 Statistiques et Probabilités

3.1 Problèmes d'estimation

Un problème d'estimation consiste à trouver un estimateur $\hat{f}(O)$ qui approche une fonction $f(P)$ définie sur une distribution de probabilité P. Les observations O suivent la distribution P.

Deux questions fondamentales dans un problème d'estimation :

1. Trouver un estimateur computationnellement efficace.
2. Évaluer la qualité statistique de cet estimateur (par exemple en termes de biais, variance, ou risque espéré).

3.2 Estimation du maximum de vraisemblance

L'estimation par maximum de vraisemblance (EMV) est une méthode paramétrique qui consiste à maximiser la vraisemblance des observations. L'estimateur du maximum de vraisemblance est défini comme :

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta} L(\theta \mid O)$$

où $L(\theta \mid O)$ est la fonction de vraisemblance, θ étant le paramètre à estimer, et O les observations.

3.3 Moments et probabilités de queue

L'analyse des moments permet de mesurer les caractéristiques d'une distribution, telles que le biais et la variance d'un estimateur. Le contrôle des probabilités de queue permet d'évaluer la probabilité des événements rares, c'est-à-dire des valeurs extrêmes observées dans les données.

4 Exercice 7 : Dualité et contraintes séparables

On considère un producteur de glace qui souhaite produire au moins 100 kg de glace par jour. Ce producteur a trois employés : le premier produit 5 kg de glace par heure, le second 10 kg par heure, et le troisième 1 kg par heure. Une journée de travail dure au maximum 8 heures. Le producteur souhaite minimiser les coûts de production, sachant que l'employé i est payé à la fin de la journée x_i^2 centimes d'euros, où x_i est la quantité de glace produite par l'employé i.

4.1 Énoncé du problème

Minimiser la fonction :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sous les contraintes :

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100 \quad \text{et} \quad x_1 \in [0, 40], x_2 \in [0, 80], x_3 \in [0, 8]$$

4.2 Solution par dualité

La Lagrangienne associée est :

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(100 - x_1 - x_2 - x_3)$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur de Lagrange. La fonction duale est alors :

$$q(\lambda) = \inf_{x_1 \in [0,40]} f_1(x_1, \lambda) + \inf_{x_2 \in [0,80]} f_2(x_2, \lambda) + \inf_{x_3 \in [0,8]} f_3(x_3, \lambda) + 100\lambda$$

avec $f_1(x_1, \lambda) = x_1^2 - \lambda x_1,\ f_2(x_2, \lambda) = x_2^2 - \lambda x_2,\ f_3(x_3, \lambda) = x_3^2 - \lambda x_3.$

4.3 Résolution et solution optimale

Après résolution, la solution optimale est obtenue pour $\lambda^* = 104$, donnant $x_1^* = 40$, $x_2^* = 52$ et $x_3^* = 8$, ce qui satisfait la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 100$.