Aix*Marseille université

Année 2024-25

Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 3

Algèbre linéaire.

1 Concepts fondamentaux en algèbre linéaire

Exercice 1 Fonction linéaire. ($\star$)

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ x, y & \mapsto & x+y, x-y \end{array} \right.$$

Montrez que f est linéaire.

Exercice 2 Espaces vectoriels fonctionnels. ($\star\star$)

1. Proposez une notion d'addition et de produit scalaire naturelle sur l'espace $C^0([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$
2. Prouvez que les notions d'addition et de produit scalaire proposées munissent bien de $C^0([a,b],\mathbf{R})$ d'une structure d'espace vectoriel.
3. On considère la fonction e_x qui évalue une fonction continue en un point $x \in \mathbf{R}$:

$$e_x : \left| \begin{array}{ccc} C^0([a,b],\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Prouvez que e_x est linéaire.

Exercice 3 Notions élémentaires. ($\star$)

1. Décrivez en language naturel l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,1,0)$ et $(3,3,0)$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelle est la dimension de cet espace ?
3. Les vecteurs $(3,2)$ et $(6,4)$ de $\mathbf{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants ?
4. Qu'en est-il des vecteurs $(3,2,1)$ et $(6,4,0)$ de $\mathbf{R}^3$?
5. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. La famille (e_1,e_2,e_3) est-elle libre ?

6. Est-ce que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$?

7. Est-ce que de $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?

8. Démontrer par l'absurde le théorème sur la dimension d'un espace vectoriel vu en cours.

Exercice 4 Représentation matricielle des applications linéaires. ($\star$)

1. Donnez la matrice de l'application $f : x, y \mapsto y, 3x + y$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

2. Utilisez cette matrice pour trouver $f(6, 17)$.

3. A l'aide d'un produit matriciel, obtenez la matrice de la composée de f avec $g : x, y \mapsto x+y$.

4. Même question pour la composée de f avec $h_y : x \mapsto x + y$.

Exercice 5 Changement de système de coordonnées. ($\star$)

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.

2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1e_1 + v_2e_2$, alors $P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.

3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B.

Exercice 6 Représentation matricielles d'opérations linéaires sur les polynômes. ($\star\star$)

On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto & f(P) = (a_2 + a_0)X^3 + a_1X^2 + a_0 \end{array} \right.$$

et les bases canoniques $V = (1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ et $W = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

1. Montrez que f est linéaire.

2. Donnez la matrice $M(f, V, W)$.

3. A l'aide de cette matrice, évaluez $f(X^2 - 3X + 1)$

Exercice 7 Différentes visions des opérations matricielles. ($\star$)

1. Écrire le produit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;

   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.

2. Écrire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme deux produits matrice-vecteur ;

   (b) comme deux produits vecteur-matrice ;

   (c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;

   (d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Exercice 8 Matrix product with diagonal matrix. ($\star$)

On note $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice $\begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{bmatrix}$ with all the off-diagonal coefficients equal to zero.

1. Express the matrix product $A\mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in terms of the columns of A and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \dots, x_n$.
2. Express the matrix product $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)B$ in terms of the lines of B and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Exercice 9 Matrices nilpotentes. ($\star\star$)

Soit N une matrice nilpotente de taille n par n (c'est à dire qu'il existe un entier p strictement positif, tel que $N^p = 0$). On définit $q := \inf\{r \mid N^r = 0, r \in \mathbf{N}, r > 0\}$ l'indice de nilpotence de N.

1. Montrer que $q \leq n$. Indice : par un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il existe une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ est une famille libre et conclure.
2. Soit A et B deux matrices de taille n par n qui commutent (c'est à dire qu'on a $AB = BA$) et soit k un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer l'identité remarquable :

$$A^k - B^k = (A - B) \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B^i \right).$$

3. À l'aide d'un choix judicieux de A, B et k, montrer que $I - N$ est inversible et donner son inverse.

4. Soit a un nombre réel. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice de taille n par n :

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Algèbre linéaire : orthogonalité

Exercice 10 Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$. ($\star$)

Prouvez que la fonction

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x, y \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 11 Matrices orthogonales. ($\star$)

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ les coordonnées de n vecteurs de dimensions d dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$.

1. On suppose que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, calculez les produits matriciels $[v_1\ v_2\ \dots\ v_n][v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T$ et $[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$, où on a considéré les v_i comme des matrices colonnes.
2. Même question, si on suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux.
3. On suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux et que $n = d$. Montrez que la matrice $[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$ est inversible et donnez son inverse.

Exercice 12 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et décomposition QR. ($\star$)

On considère le vecteur de v_1 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(3, 1)$ et le vecteur v_2 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(2, 2)$.

1. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (v_1, v_2).
2. En déduire une décomposition de la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

commme un produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 13 Validité du processus de Gram-Schmidt. ($\star\star$)

Etant donnés un espace vectoriel E et un produit scalaire $(.|.)$ quelconques (possiblement en dimension infinie), prouvez par récurrence que la famille de vecteurs produite par le processus de Gram-Schmidt est orthonormale.

Exercice 14 Polynômes orthogonaux. ($\star\star\star$)

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif d et des nombres réels a_0, a_1, $\dots$, a_d, tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.
2. Montrer que :
$$(.\mid.) : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array} \right.$$
définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
3. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(.\mid.)$ et telle que pour tout entier positif n, le degré de P_n est n et le coefficient d'ordre n de P_n est strictement positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.
4. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$?
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:
$$P_n(X) = (a_n X + b_n)P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X),$$
pour des suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (c_n) qu'on explicitera.

3 Algèbre linéaire : structure des applications linéaires

Exercice 15 Propriétés élémentaires de la décomposition en valeurs singulières. ($\star$)

Indice : dans le cadre de cet exercice, pensez aux différentes interprétations des produits matrice-matrice et matrice-vecteurs que nous avons vu en cours.

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par n. Le théorème sur la décomposition en valeurs singulières indique qu'il existe une matrice orthogonale $U = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_m]$ de taille m par m, une matrice orthogonale $V = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$ de taille n par n, un entier naturel $r \leq \min(m, n)$ et une matrice diagonale $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ de taille m par n, tels que toutes les matrices sont à coefficients réels, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ et $AV = U\Sigma$.

1. Montrez que $A = U\Sigma V^T$ et que $\Sigma = U^T AV$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, r\}$, $Av_i = \sigma_i u_i$.
3. Montrez que pour tout i dans $\{r + 1, r + 2, \ldots, n\}$, $Av_i = 0$, i.e. $v_i \in \text{Ker}A$.
4. Montrez que $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$.

Exercice 16 Dérivation des théorèmes fondamentaux de l'algèbre linéaire à partir de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

On considère le même point de départ que dans l'exercice précédent (décomposition en valeur singulière d'une matrice A).

1. Montrez que les r premières colonnes de U forment une base orthonormale de l'image de A.
2. Montrez que les $m - r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale du co-noyau de A (i.e. le noyau de A^T).
3. Montrez que les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de la co-image de A (i.e. l'image de A^T).
4. Montrez que les $n - r$ dernières colonnes de V forment une base orthonormale du noyau de A.
5. Montrez que le noyau et la co-image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire qu'on peut décomposer tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ de manière unique en une somme de deux vecteurs orthogonaux, l'un appartenant au noyau de A et l'autre appartenant à la co-image de A.
6. Montrez que le co-noyau et l'image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^m$.
7. Montrez qu'il existe un unique entier naturel $r \leq \min(m, n)$, le range de A, tel que l'image et la co-image de A sont de même dimension r.

8. Montrez que l'entier r de la question précédente est aussi la dimension de l'image de toute application linéaire $f : E \to F$ telle qu'il existe des bases B_E et B_F de E et F telles que $A = M(f, B_E, B_F)$.

9. Montrez que la matrice A est inversible—c'est à dire qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$—si et seulement si $r = m = n$ et donnez une expression pour A^{-1} en fonction de U, Σ et V.

Exercice 17 Décomposition en valeurs singulières des matrices orthogonales. ($\star$)

Déterminez les valeurs singulières d'une matrice orthogonale.

Exercice 18 Propriétés élémentaires de la décomposition spectrale. ($\star$)

Soit S une matrice à coefficients réels de taille m par m symmétrique. Le théorème spectral indique qu'il existe une matrice orthogonale réelle $Q = [q_1 \; q_2 \; \ldots q_m]$ de taille m par m et une matrice diagonale réelle $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ de taille m par m, telles que $S = Q\lambda Q^T$.

1. Montrez que $\Lambda = Q^T S Q$ et que $SQ = Q\Lambda$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $Sq_i = \lambda_i q_i$.
3. Montrez que $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$.
4. Proposez une interprétation intuitive du résultat du produit matrice vecteur Sv en vous appuyant sur la réponse à la question précédente.
5. On considère un polynôme P. Calculer $P(S)$ en fonction de Q et Λ.

Exercice 19 Éléments propres de $A^T A$ et AA^T. ($\star$)

1. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.
2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres pour chacune de ces deux matrices en fonction des matrices orthogonales U et V apparaissant dans la décomposition en valeur singulières de A.

Exercice 20 Positivité des matrices symmétriques et décomposition spectrale. ($\star$)

On considère une matrice symmétrique réelle S. Donnez des conditions nécessaire et suffisante sur les éléments de la décomposition spectrale de S pour que S soit semi-définie positive ? Pour que S soit définie positive ?

Exercice 21 Relation d'ordre sur les matrices. ($\star$)

La relation d'ordre sur les matrices symmétriques réelles proposée en cours, définit-elle un ordre total ? (C'est à dire, étant donnée deux matrices symmétriques réelles S_1 et S_2, a-t-on toujours soit $S_1 \preceq S_2$, soit $S_2 \preceq S_1$?)

Exercice 22 Vecteurs propres et valeurs propres. ($\star$)

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par m.

1. Montrez que si v est un vecteur propre de A tout produit de v par un scalaire est aussi un vecteur propre de A.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre de A, le conjugué $\bar{\lambda}$ de λ est aussi une valeur propre de A.

Exercice 23 Matrices non-diagonalisables. ($\star$)

Démontrez que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 24 Déterminant et trace. ($\star$)

1. Calculez le déterminant et la trace de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculez le déterminant de la matrice identité I_n de taille n par n en partant de la définitions formelle du déterminant.
3. Calculez le déterminant de la matrice $\text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en partant de la définitions formelle du déterminant.
4. Soit P une matrice inversible de taille $m \times m$, Q une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que $\det(P^{-1}AP) = \det(Q^T AQ) = \det(A)$ et que $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(Q^T AQ) = \text{Tr}(A)$.
5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. En utilisant la décomposition de Jordan, calculez la trace et le déterminant de A en fonction de ses valeurs propres.

Exercice 25 Polynôme caractéristique. ($\star$)

1. Calculez le polynôme caractéristique de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Vérifiez que le théorème de Cayley-Hamilton est vérifié dans le cadre de cet exemple.
3. Donnez le polynôme caractéristique d'une matrice de taille 2×2 quelconque en fonction de la trace et du déterminant de la matrice.
4. Montrez que le polynôme caractéristique est invariant au changement de système de coordonnées.
5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que les racines du polynôme caractéristique de A sont les valeurs propres de A avec leur multiplicité. Commencez par considérer le cas où A est diagonale, puis le cas où A est diagonalisable, puis le cas général.

Exercice 26 Ensembles de matrices. ($\star$)

1. Montrez que l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ des matrices à coefficients réels de taille m par n muni de l'addition et du produit scalaire usuel est un espace vectoriel.
2. Montrez que la dimension de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ est mn, par exemple en proposant une base canonique.

Exercice 27 Diagonalisation. ($\star$)

On considère la matrice
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner les valeurs propres de A.
3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.
4. Donner une diagonalisation de A.
5. Calculer l'inverse de A.
6. Calculer l'exponentielle de A.

4 Algèbre linéaire et optimisation

Exercice 28 Optimisation, normes, valeurs singulières et éléments propres. ($\star$)

1. Prouvez que $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ et que $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ pour toute matrice orthogonale Q.
2. Prouvez que $\|A\|_F = \|(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)\|_2$.
3. Prouvez que $\|A\|_2 = \sigma_1$.
4. Soit M une matrice carrée à coefficients réels. Prouvez que $\sigma_r(M) \leq \lambda \leq \sigma_1(M)$ pour toute valeur propre λ de M. Commencez par le cas d'une matrice de rang 1.
5. Montrez que toutes les valeurs propres d'une matrice orthogonale ont un module de 1.

Exercice 29 Moindres carrés linéaires et pseudo-inverse. ($\star\star$)

Etant donné A une matrice à coefficients réels de taille m par n et y une matrice colonne de taille m, on cherche à déterminer si $l : x \mapsto \|Ax - y\|_2$ possède une minimum global et à identifier le ou les $x \in \mathbf{R}^n$ où cet éventuel minimum global est atteint.

1. Montre qu'on peut répondre à notre question en étudiants $f : x \mapsto (Ax - y)^T(Ax - y)$.
2. Justifier que f est de classe C^1 et calculer le gradient de f.
3. En déduire une condition nécessaire d'optimum local pour f.
4. Calculez la Hessienne de f.
5. En déduire que f admet (au moins) un minimum global.
6. Donnez une condition nécessaire d'optimum global pour f.
7. On suppose que $A^T A$ est inversible. Prouvez que l admet un unique minimum global et donnez une expression explicite pour ce minimum global.
8. On définit la pseudo-inverse A^+ d'une matrice A à coefficients réels de taille m par n par le biais de sa décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^T$ comme $A^+ := V\Sigma^+ U^T$ où Σ^+ est la matrice diagonale contenant sur la case i de sa diagonale l'inverse de la i-ième valeurs singulière de A si celle-ci est strictement positive et 0 sinon. Montrez que si A est carrée et inversible, $A^+ = A$.
9. Montrez que $(A^+)^+ = A$, que $(A^+)^T = (A^T)^+$, et que $A(A^T)(A^+)^T = A = (A^+)^T(A^T)A$.
10. Montrez que AA^+ est la projection orthogonale sur l'image de A, que A^+A est la projection orthogonale sur l'espace des lignes de A (co-image), que $I - AA^+$ est la projection orthogonale sur le co-noyau de A et que $I - A^+A$ est la projection orthogonale sur sur le noyau de A.

11. Soit X une matrice à coefficients réels de taille n par d. Montrez que $\theta^* = X^+ y$ est la solution de norme minimale du problème des moindres carrés linéaires consistant à minimiser $\|y - X\theta\|_2$. Précisez l'ensemble des autres solutions possibles s'il y en a.

Exercice 30 Régression linéaire et régularisation L_2. ($\star\star$)

On observe $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n) \in (\mathbf{R}^d \times \mathbf{R})^n$. On modélise $x_1, \dots, x_n$ comme les valeurs observées de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi P et $y_1, \dots, y_n$ comme les valeurs observées de variables aléatoires $Y_1, \dots Y_n$ telles qu'il existe $\theta^* \in \mathbf{R}^d$ tel que pour tout i dans $\{1, \dots n\}$, $Y_i = X_i^T \theta^* + \epsilon_i$, avec $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ i.i.d. de loi N telle que $\mathbf{E}(N) = 0$ et $\mathbf{Var}(N) = \sigma^2$.

On note X la matrice de taille n par d dont les lignes sont $x_1, \dots, x_n$ et Y la matrice colonne contenant $y_1, \dots, y_n$. On cherche à estimer θ^* et on considère deux estimateurs :

— L'estimateur de la régression « ridge » :

$$\hat{\theta}_\lambda := \arg\min_{\theta \in \mathbf{R}^d} \frac{1}{n} \|Y - X\theta\|_2^2 + \lambda \|\theta\|_2^2,$$

défini pour $\lambda > 0$;

— L'estimateur de norme minimale parmi les estimateurs au moindre carrés :

$$\hat{\theta} := \arg\min_{\theta \in \Theta_{LS}} \|\theta\|_2$$

où $\Theta_{LS} = \arg\min_{\theta \in \mathbf{R}^d} \|Y - X\theta\|_2^2$.

1. Montrez que pour toute matrice M de taille n par m et tout réel $\delta > 0$, $M^T M + \delta I$ est inversible. (Vous pouvez montrer, par exemple, que la matrice est symmétrique définie positive et utiliser le théorème spectral pour conclure.)
2. Montrez que le problème d'optimisation dont $\hat{\theta}_\lambda$ est défini comme la solution possède bien une unique solution donnée par $\hat{\theta}_\lambda = \frac{1}{n}\left(\frac{X^T X}{n} + \lambda I\right)^{-1} X^T Y$.
3. Montrez que le problème d'optimisation dont $\hat{\theta}$ est défini comme la solution possède bien une unique solution donnée par $\hat{\theta} = X^\dagger Y$, où $X^\dagger$ est la pseudo-inverse (de Moore-Penrose) de X.
4. Montrez que $\hat{\theta}_\lambda$ tend vers $\hat{\theta}$ quand λ tend vers 0 par valeurs positives. (Indice : commencer par le cas où $d = n = 1$, puis le cas où X est diagonale, puis le cas général.)
5. Montrez qu'une simple descente de gradient à pas fixe sur $f(\theta) := \|Y - X\theta\|^2$ converge vers $\hat{\theta}$. Précisez comment choisir le pas. (Vous pouvez vous inspirer de l'exercice sur la

convergence de la descente de gradient dans le cas lisse et fortement convexe.)

6. Calculez le biais de $\hat{\theta}_\lambda$.
7. Calculez $v(\hat{\theta}_\lambda) := \mathbf{E}\left[\left\|\hat{\theta}_\lambda - \mathbf{E}[\hat{\theta}_\lambda]\right\|_2^2\right]$, la variance totale de $\hat{\theta}_\lambda$.
8. Calculez le biais et la variance (totale) de $\hat{\theta}$ et commentez.

Exercice 31 Weyl's inequality. ($\star\star$)

Nous allons prouver un résultat qui peut être utile, par exemple, pour analyser les propriétés statistiques de l'estimateur usuel utilisé dans le cadre d'une analyse en composantes principales.

Considérons une matrice symmétrique M à coefficients réels et de taille d par d à laquelle on ajoute une perturbation, représentée par une autre matrice symétrique P à coefficients réels et de taille d par d. On cherche à trouver des conditions sous lesquelles on peut garantir que les valeurs propres de M et celles de $M' = M + P$ sont proches.

Pour toute matrice symmétrique A à coefficients réels et de taille d par d, on note $\lambda_1(A), \lambda_2, \ldots, \lambda_d(A)$ les valeurs propres de A triées par ordre décroissant.

1. Montrer que :
$$|\lambda_1(M') - \lambda_1(M)| \leq \|P\|.$$
(Indice : nous avons défini et prouvé certaines propriétés de la norme matricielle $\|.\|_2$ en cours.)
2. Soit $i \in \{2, 3, \ldots, d\}$. Notons $\mathcal{E}_i^d$ l'ensemble de tous les sous-espaces de dimension i de $\mathbf{R}^d$. Montrer que pour toute matrice symmétrique A à coefficients réels et de taille d par d, la i-ième valeur propre de A est donnée par :
$$\lambda_i(A) = \min_{E \in \mathcal{E}_i^d} \max_{v \in E^\perp \cap \mathcal{S}^{d-1}} v^T A v,$$
où $E^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R}^d$ orthogonaux à tous les éléments de E et $\mathcal{S}^{d-1}$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R}^d$ de norme euclidienne 1.
3. Montrer que :
$$\max_{i \in \{1,2,\ldots,d\}} |\lambda_i(M') - \lambda_i(M)| \leq \|P\|_2.$$

Exercice 32 Preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

1. Prouver que toute matrice semi-orthogonale de taille n par r, avec $r \leq n$, peut être complétée en une matrice orthogonale de taille n par n.

2. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Montrer qu'il est possible de trouver une matrice colonne x de taille n et une matrice colonne y de taille m, telles que : $Ax = \sigma y$, $\|x\|_2 = 1$, $\|y\|_2 = 1$ et $\sigma = \|A\|_2$. Indice : utiliser l'une des deux définitions équivalentes de $\|A\|_2$.

3. En utilisant le résultat de la première question, x et y, montrer qu'il existe une matrice orthogonale U de taille m par m, une matrice orthogonale V de taille n par n, une matrice colonne w de taille $n-1$ et une matrice B de taille $m-1$ par $n-1$, telles que :

$$A_1 := U^T A V = \begin{pmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $\|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + w^T w$. Indice : multiplier A_1 par $(\sigma\ w^T)^T$.

5. Montrer que $\|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2$ et en déduire la valeur de w.

6. Utiliser un raisonnement par récurrence pour compléter la preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières.

5 Algèbre linéaire et probabilité

Exercice 33 Gaussienne multivariée. ($\star\star$)

1. Montrez que la densité d'un gaussienne multivariée est maximale en $x = \mu$.

2. Exprimez la vitesse de décroissance d'une gaussienne multivariée en $x = \mu$ le long d'un vecteur u de norme 1 en fonction des éléments propres de la matrice de covariance de la distribution.