Aix*Marseille université

Année 2024-25

Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 1

Optimisation.

1 Optimisation sans contraintes

Exercice 1 Calcul différentiel. ($\star$)

1. Calculez les dérivées partielles par rapport à x et à y de la fonction $f : x, y \mapsto x^2 y$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.

Solution : Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : x, y \mapsto 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : x, y \mapsto x^2$$

2. Utilisez la règle donnant le Jacobien d'une fonction composée pour calculer le gradient de la fonction $x \mapsto \|x\|_2$ de de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$.

Solution : La norme $\|x\|_2$ est donnée par : $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Nous pouvons écrire $\|x\|_2$ comme une composition de deux fonctions :

$$f : t \mapsto \sqrt{t} \quad \text{et} \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

La Jacobienne de f est : $J_f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

La Jacobienne de g est la transposée de son gradient :

$$\nabla g(x)^T = 2[x_1, x_2, \ldots, x_n] = 2x^T$$

En appliquant la règle donnant le Jacobien d'une fonction composée, nous obtenons :

$$\nabla \|x\|_2^T = J_f(g(x)) \cdot \nabla g(x)^T = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot 2x^T$$

Et finalement :

$$\nabla \|x\|_2 = \frac{x}{\|x\|_2}$$

(un vecteur de norme 1 dans la direction x).

3. Calculez la Hessienne de la fonction $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.

Solution : Les dérivées partielles premières sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$$

La Hessienne est donc :

$$H(f) : x, y \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$$

4. Soit M une matrice à coefficients réels de taille n par n. Calculez la Hessienne de la fonction $g_M : x \mapsto x^T M x$ de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$.

Solution :

La fonction $g_M(x) = x^T M x$ peut être développée explicitement comme suit :

$$g_M(x) = \sum_{i,j} M_{ij} x_i x_j$$

Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour trouver la dérivée première par rapport à x_i, réécrivons la fonction de manière à faire apparaître les terms en x_k :

$$g_M(x) = M_{kk} x_k^2 + \sum_{i \neq k} M_{ik} x_i x_k + \sum_{i \neq k} M_{ki} x_k x_i + \sum_{i \neq k} M_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq k} \sum_{j neq k} M_{ij} x_i x_j$$

On obtient en dérivant par rapport à x_k

$$\frac{\partial g_M}{\partial x_k} : x \mapsto 2M_{kk} x_k + \sum_{i \neq k} M_{ik} x_i + \sum_{i \neq k} M_{ki} x_i = (M_{:k}^T + M_{k:})x$$

Et donc : $\nabla g_M : x \mapsto (M^T + M)x$.

La dérivée seconde est alors :

$$\frac{\partial^2 g_M}{\partial x_i \partial x_j}(x) = M_{ij} + M_{ji}$$

La Hessienne de g_M est donc : $H(g_M) : x \mapsto M + M^T$.

Exercice 2 Existence et unicité des extrema. ($\star$)

1. Considerons $f : x \mapsto \sin(x)$ de $[0, \pi]$ vers $\mathbf{R}$. On admet que comme f est définie sur un intervalle fermé borné et continue sur cet intervalle, elle admet un minimum global (cf. théorème de Weierstrass en analyse réelle `https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_valeurs_extr%C3%AAmes`). Trouver le minimum global de f en utilisant une condition nécessaire d'existence de minimum global.

   Solution : Soit x^* un minimum global de f sur $[0, \pi]$. On peut raisonner par disjonction des cas.

   Cas 1 : $x^* \in]0, \pi[$. Dans ce cas x^* est aussi un minimum local de f sur $]0, \pi[$. Or $]0, \pi[$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ et f est de class C_1 sur cet intervalle. Donc, la condition nécessaire d'existence de minimum local vue en cours s'applique et $\nabla f(x^*) = 0$, c'est à dire $cos(x^*) = 0$. Or $cos(x) = 0$ a pour unique solution $\pi/2$ sur $]0, \pi[$, , donc $x^* = \pi/2$. On en déduit que si $x^* \in]0, \pi[$, alors le minimum de f sur $[0, \pi]$ est $\sin(\pi/2) = 1$.

   Cas 2 : $x^* = 0$ ou $x^* = \pi$. Dans ce cas le minimum de f sur $[0, \pi]$ est soit $\sin(0) = 0$ soit $\sin(\pi) = 0$.

   Comme $0 < 1$, on peut conclure que le minimum global de f est 0 (et qu'il est atteint deux fois, en 0 et en π).

2. Montrez que la fonction $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ admet un unique minimum global et identifiez ce minimum.

   Solution : f est continue sur $\mathbf{R}^2$ et coercive, elle admet donc (au moins) un minimum global sur $\mathbf{R}^2$ (car $\mathbf{R}^2$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}^2$).

   Soit x^*, y^* un minimum global de f. x^*, y^* est aussi un minimum local de f et f est de classe C_1 sur $\mathbf{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, donc $\nabla f(x^*, y^*) = 2x^*, 2y^* = 0$, donc $x^*, y^* = 0, 0$.

   On en déduit que f atteint son minimum global de 0 uniquement en $(0, 0)$.

   Notez qu'on pourrait aussi utiliser la convexité de f pour répondre à cette question.

3. Prouvez que la fonction $f : x_1, x_2 \mapsto x_1^2 - 36x_1 - 36x_2 + x_2^2 + 150$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ admet un minimum global.

   Solution : f est coercive, et comme est elle définie et continue sur $\mathbf{R}^2$, elle admet un minimum global.

Exercice 3 Déterminez si $f : x, y \mapsto xy + x^2 + 1 + 2y$ est convexe.

Solution :

Etudions la positivité de la Hessienne de f.

Les dérivées partielles premières de f sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2.$$

Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Donc la Hessienne est :

$$H(f) : x, y \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a $(x, y)(H(f)(x, y))(x, y)^T = 2x^2 + 2xy$.

Or $2x^2 + 2xy$ est négatif pour $x = 1$ et $y = -3$ (par exemple), donc $H(f)(1, -3)$ n'est pas semie-définie positive.

Or f étant de classe C_2, elle est convexe si et seulement si sa Hessienne est semie-définie positive sur l'intérieur de $\mathbf{R}^2$, c'est à dire sur $\mathbf{R}^2$.

Donc f n'est pas convexe.

Exercice 4 Preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

1. Prouver que toute matrice semi-orthogonale de taille n par r, avec $r \leq n$, peut être complétée en une matrice orthogonale de taille n par n.

2. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Montrer qu'il est possible de trouver une matrice colonne x de taille n et une matrice colonne y de taille m, telles que : $Ax = \sigma y$, $\|x\|_2 = 1$, $\|y\|_2 = 1$ et $\sigma = \|A\|_2$. Indice : utiliser l'une des deux définitions équivalentes de $\|A\|_2$.

3. En utilisant le résultat de la première question, x et y, montrer qu'il existe une matrice orthogonale U de taille m par m, une matrice orthogonale V de taille n par n, une matrice colonne w de taille $n-1$ et une matrice B de taille $m-1$ par $n-1$, telles que :

$$A_1 := U^T A V = \begin{pmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $\|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + w^T w$. Indice : multiplier A_1 par $(\sigma \ w^T)^T$.
5. Montrer que $\|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2$ et en déduire la valeur de w.
6. Utiliser un raisonnement par récurrence pour compléter la preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières.

2 Optimisation sous contraintes

Point de cours. Conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour des fonctions $\mathcal{C}^1$.

Soit f, $(e_i)_{i=1}^{n_E}$ et $(c_i)_{i=1}^{n_I}$ des fonctions de $\mathbf{R}^d$ vers $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme nous l'avons vu en cours, on dit que le point $x^* \in \mathbf{R}^d$ vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour le problème :

$$\min_{x \in \mathbf{R}^d} f(x) \text{ tel que } \begin{cases} e_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} \end{cases}$$

si et seulement si il existe $\lambda_E^* \in \mathbf{R}^{n_E}$ et $\lambda_I^* \in \mathbf{R}^{n_I}$, tels que :

1. $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda_E^*, \lambda_I^*) = 0$, où $\mathcal{L}(x, \lambda_E, \lambda_I) = f(x) + \sum_{i=1}^{n_E} \lambda_{E,i} e_i(x) + \sum_{i=1}^{n_I} \lambda_{I,i} c_i(x)$
2. $e_i(x^*) = 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_E\}$
3. $c_i(x^*) \leq 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_I\}$
4. $\lambda_{I,i} \geq 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_I\}$
5. $\lambda_{I,i} c_i(x^*) = 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_I\}$

Les trois théorèmes suivants donnent des conditions de régularité sur les fonctions du problème—appelées *qualifications des contraintes*—qui garantissent que toute solution locale du problème considéré doit vérifier les conditions KKT (c'est à dire que sous ces conditions de régularité les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale). Notez qu'on peut démontrer la validité d'autres qualification des contraintes que les trois présentées ici et qu'il est possible de généraliser ces théorèmes au delà du cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Theorem 1 *Conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéaires. Si les fonctions e_i et c_j sont affines pour $i = 1 \ldots n_E$ et $j = 1 \ldots n_I$ alors les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale pour le problème considéré.*

Theorem 2 *Conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendantes.*

Si au point $x \in \mathbf{R}^d$ la matrice formée par les gradients des contraintes d'égalité et des contraintes d'inégalité ***actives*** *est de rang plein (c'est à dire que les n_E vecteurs gradients pour les contraintes d'égalité—qui doivent toujours toutes être actives—et les vecteurs gradients pour les contraintes d'inégalité actives en x—c'est à dire telles que $c_i(x) = 0$—sont linéairement indépendants), alors les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale en x pour le problème considéré.*

Theorem 3 *Conditions nécessaires de solution locale pour un problème convexe.*

Si f est convexe, c_i est concave pour tout i in $1 \ldots n_I$ et e_j est affine pour tout j in $1 \ldots n_E$ et si la condition de Slater est vérifiée, c'est à dire s'il existe $x \in \mathbf{R}^d$ tel que $e_j(x) = 0$ pour tout j in $1 \ldots n_E$ et $c_i(x) < 0$ pour tout i in $1 \ldots n_I$, alors les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale pour le problème considéré.

Exercice 5 Application des conditions KKT. ($\star$)

On considère le problème

$$\min_{x,y \in \mathbf{R}^2} x^2 + y^2 \text{ tel que } \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \leq 2 \\ y^2 \geq x \end{cases}$$

1. Donnez les conditions KKT pour ce problème.

Solution : On peut prendre : $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$, $c_1 : x, y \mapsto 1 - x - y$, $c_2 : x, y \mapsto y - 2$, $c_3 : x, y \mapsto x - y^2$. On a $\mathcal{L} : x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mapsto x^2 + y^2 + \lambda_1(1 - x - y) + \lambda_2(y - 2) + \lambda_3(x - y^2)$ et les conditions KKT sont donc :

(a) $2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$ et $2y(1 - \lambda_3) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

(b) $y^2 \geq x$, $y \leq 2$ et $x + y \geq 1$

(c) $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_3 \geq 0$

(d) $\lambda_1(1 - x - y) = 0$, $\lambda_2(y - 2) = 0$ et $\lambda_3(x - y^2) = 0$

2. Trouvez tous les points solutions des conditions de KKT pour ce problème.

Solution : On raisonne par disjonction des cas selon les contraintes saturées.

(a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Alors la nullité du gradient du Lagrangien nous donne que $(x, y) = (0, 0)$, mais alors $x + y = 0 < 1$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 \neq 0$. Alors, $x = -\lambda_3/2$, $y^2 = x$ et $y = 0$ ou $\lambda_3 = 1$. Si $y = 0$, alors $x = 0$, ce qui ne donne pas une solution comme on l'a déjà vu. Si $\lambda_3 = 1$, alors $x = -1/2$. Mais $y^2 = -1/2$ ne possède pas de solution pour $y \in \mathbf{R}$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

Solution : (Continuée)

(a) Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Alors $x = 0$, $y = -\lambda_2/2$ et $y = 2$. Cela contredit la condition $\lambda_2 \geq 0$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(b) Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$. Alors $x = y = \lambda_1/2$ et $x + y = 1$. Donc $x = y = 1/2$ et $\lambda_1 = 1$. Cela contredit la contrainte $y^2 \geq x$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(c) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Alors $\lambda_3 = -2x$, $\lambda_2 = 2y(\lambda_3 - 1)$, $y = 2$ et $x = y^2 = 4$. Donc $\lambda_3 = -8$ et $\lambda_2 = -36$. Cela contredit les conditions $\lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_3 \geq 0$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(d) Si $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Alors $\lambda_3 = \lambda_1 - 2x$, $\lambda_1 = 2y\frac{1+2x}{1+2y}$, $x + y = 1$ et $x = y^2$. Donc $y^2 + y - 1 = 0$. D'où $y = -1/2 + \sqrt{5}/2$ ou $y = -1/2 - \sqrt{5}/2$.
   - Si $y = -1/2 + \sqrt{5}/2$, alors $x = 3/2 - \sqrt{5}/2$, $\lambda_1 = \frac{25-9\sqrt{5}}{5} \approx 0.975$ et $\lambda_3 = \frac{10-4\sqrt{5}}{5} \approx 0.211$. On obtient après vérification que les conditions KKT sont vérifiées si et seulement si :
   $$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{25-9\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{10-4\sqrt{5}}{5}\right).$$
   - Si $y = -1/2 - \sqrt{5}/2$, alors $x = 3/2 + \sqrt{5}/2$, $\lambda_1 = \frac{25+9\sqrt{5}}{5}$ et $\lambda_3 = \frac{10+4\sqrt{5}}{5}$. On obtient après vérification que les conditions KKT sont vérifiées si et seulement si :
   $$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{25+9\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{10+4\sqrt{5}}{5}\right).$$

(e) Si $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Alors $\lambda_1 = 2x$, $\lambda_2 = \lambda_1 - 2y$, $x + y = 1$ et $y = 2$. Donc $x = -1$, $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -6$. Cela contredit les conditions $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(f) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_3 \neq 0$. Alors, $x + y = 1$, $y = 2$ et $y = x^2$. Ce système d'équations ne possède pas de solution. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

Au final, il n'y a que deux points $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de $\mathbf{R}^5$ satisfiant les conditions KKT (donnés ci-dessus).

3. Donnez en le justifiant toutes les solutions globales de ce problème.

Solution : Cherchons des conditions nécessaires pour que $x \in \mathbf{R}^2$ soit une solution globale. Si x est une solution globale, alors x est une solution locale. On raisonne par disjonction des cas sur les contraintes actives (comme dans la question précédente) pour appliquer les conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendantes données dans l'énoncé. On a $\nabla c_1 : x, y \mapsto (1, 1)$, $\nabla c_2 : x, y \mapsto (0, -1)$ et $\nabla c_3 : x, y \mapsto (-1, 2y)$.

(a) Si en (x, y), aucune contrainte n'est active ou une seule contrainte est active ou seulement deux contraintes sont actives, en excluant le cas où c_1 et c_3 sont actives, alors la matrice des gradients des contraintes actives est de rang plein et les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale.

(b) Si en (x, y), seules c_1 et c_3 sont actives, alors la matrice des gradients des contraintes actives est de rang plein sauf si $y = -1/2$. Mais si $y = -1/2$ et c_1 et c_3 sont actives, alors $x = 3/2$ et $y^2 = 1/4 = x$, ce qui est une contradiction. Si c_1 et c_3 sont actives, les conditions KKT sont donc des conditions nécessaires de solution locale.

(c) On a déjà vu dans la question précédente qu'on ne peut pas avoir c_1, c_2 et c_3 actives simultanément en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a donc traité tous les cas possibles.

On en conclut que les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale pour le problème considéré et donc que les seules solutions globales possibles sont :

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \text{ et } (x_2, y_2) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right).$$

En calculant la valeur de f en (x_1, y_1) et (x_2, y_2) on voit que $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$. Donc la seule solution globale possible est (x_1, y_1).

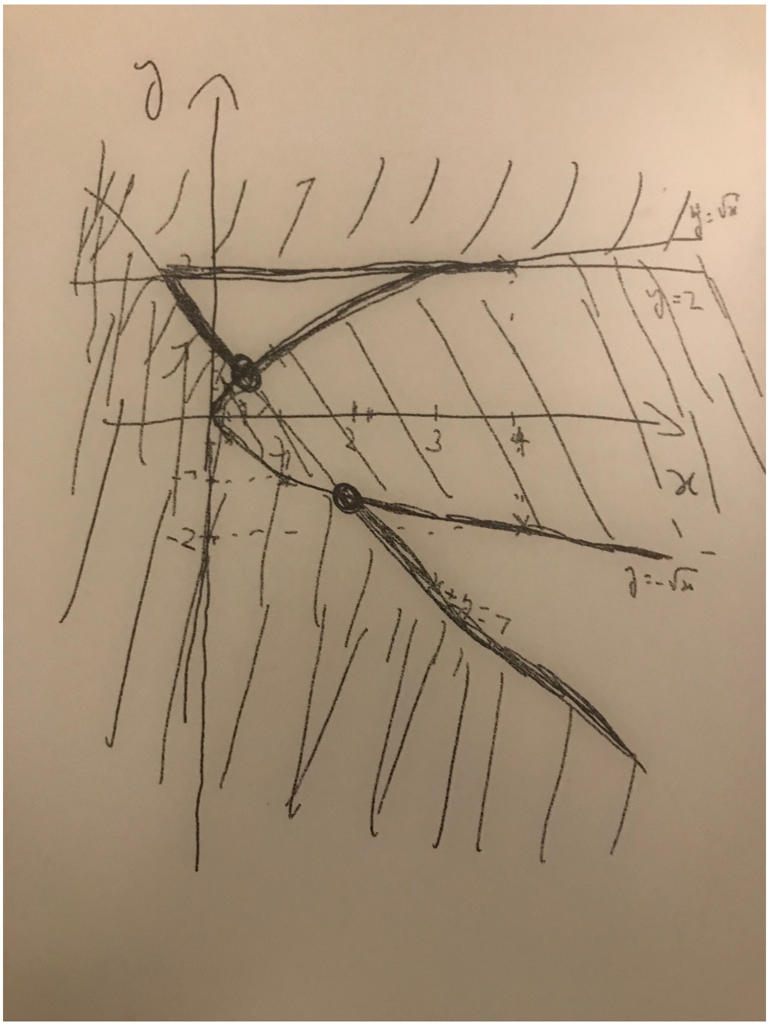
Il reste à déterminer si le problème admet au moins une solution globale. L'ensemble des Ω des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant les contraintes d'inégalité c_1, c_2, c_3 est un fermé de $\mathbf{R}^2$ (cf. question suivante pour une visualisation de Ω) et f est continue et coercive sur $\mathbf{R}^2$. On en déduit que f admet (au moins) un minimum global sur Ω.

Cela nous permet de conclure que le problème possède une unique solution globale en :

$$x^* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \ y^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

4. Faites un graphe pour vérifier la plausibilité de vos réponses.

Solution :



Exercice 6 Boîte de surface maximale à diagonale fixée. ($\star$)

Trouvez le parallélépipède rectangle (pavé droit) dont la surface (somme des aires des six faces) est maximale parmi tous les parallélépides rectangles de diagonale $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L$, où L est un nombre réel strictement positif fixé et x_1, x_2, x_3 sont les longueurs des côtés du parallélépipède rectangle.

Solution : Une modèle raisonnable pour la situation décrite est le problème de maximiser $f(x_1, x_2, x_3) := 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ sur $\mathbf{R}^3$ sous la contrainte que $e(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - L$ soit égal à 0 et que $c_1(x_1, x_2, x_3) := x_1$, $c_2(x_1, x_2, x_3) := x_2$ and $c_3(x_1, x_2, x_3) := x_3$ soient positive.

Solution : (Continuée)

Il s'agit d'un problème de maximisation d'une fonction continue sur un ensemble compact (fermé, borné) de $\mathbf{R}^3$, qui admet donc (au moins) une solution globale.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. x vérifie les conditions KKT si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que :

1. $\nabla_x(2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - L) - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3) = 0$, c'est à dire :
   (a) $2(x_2 + x_3 - \lambda x_1) - \lambda_1 = 0$
   (b) $2(x_1 + x_3 - \lambda x_2) - \lambda_2 = 0$
   (c) $2(x_1 + x_2 - \lambda x_3) - \lambda_3 = 0$
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L$
3. $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$
4. $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0$
5. $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3 = 0$

Les gradients des contraintes sont : $\nabla e(x) = 2x$, $\nabla c_1(x) = (1, 0, 0)$, $\nabla c_2(x) = (0, 1, 0)$, $\nabla c_3(x) = (0, 0, 1)$. Si $x = (0, 0, 0)$ e ne peut pas être satisfaite car $L > 0$. Si $x \neq (0, 0, 0)$, les trois contraintes d'inégalités ne sont pas actives en même temps et on vérifie immédiatement que les gradients des contraintes actives sont linéairement indépendants. On en déduit, en utilisant le théorème donnant les conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendantes, que les solutions globales du problème sont nécessairement atteintes en des points satisfiant les conditions KKT.

On raisonne par disjonction des cas pour trouver tous les points vérifiant les conditions KKT.

1. On a déjà vu que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ne convient pas.
2. Supposons $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 > 0$. Alors $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, \sqrt{L}, 0, 2\sqrt{L}, 2\sqrt{L}, 0)$ est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est 0. Le problème étant symmétrique par permutation de (x_1, x_2, x_3), les points KKT pour le cas $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 > 0$ et pour le cas $x_2 = x_3 = 0$ et $x_1 > 0$ s'obtiennent en prenant le symmétrique approprié de la solution obtenue ci-dessus.

Solution : (Continuée)

1. Supposons $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$, $x_3 > 0$. Alors $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \sqrt{L/2}, \sqrt{L/2}, -1, 2\sqrt{2L}, 0, 0)$ est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est L. Le problème étant symmétrique par permutation de (x_1, x_2, x_3), les points KKT pour le cas $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$, $x_3 > 0$ et pour le cas $x_3 = 0$ et $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ s'obtiennent en prenant le symmétrique approprié de la solution obtenue ci-dessus.
2. Supposons $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et $x_3 > 0$. Alors $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\sqrt{L/3}, \sqrt{L/3}, \sqrt{L/3}, 2, 0, 0, 0)$ est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est $2L$.

Il y a donc une unique solution globale au problème considéré, données par un cube de côté $\sqrt{L/3}$ et de surface $2L$.

3 Analyse convexe et dualité

Exercice 7 ($\star$) Dualité et contraintes séparables.

On considère un producteur de glace qui souhaite produire au moins 100kg de glace par jour. Ce producteur a trois employés : le premier produit 5kg de glace par heure, le second 10kg par heure et le troisième 1kg par heure. Une journée de travail dure au maximum 8h. Le producteur souhaite minimiser les coûts de production, sachant que l'employé i est payé à la fin de la journée x_i^2 centimes d'euros où x_i est la quantité de glace produite dans la journée par l'employé i.

On modélise ce problème comme suit :

Minimiser la fonction :

$$f : x_1, x_2, x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sur l'ensemble $X = [0, 40] \times [0, 80] \times [0, 8] \subset \mathbf{R}^3$, sous la contrainte :

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$$

1. Justifiez que le problème considéré possède une solution globale.

Solution : L'ensemble de contrainte considéré est un fermé borné de $\mathbf{R}^3$, non vide (il contient, par exemple, le point $(32, 60, 8)$) et la fonction à minimiser est continue sur cet ensemble. Le Théorème de Weierstrass nous permet donc de conclure que le problème considéré possède une solution globale.

2. Montrez que la fonction duale du problème considéré peut s'écrire sous la forme :

$$q(\lambda) = \inf_{x_1 \in [0,40]} f_1(x_1, \lambda) + \inf_{x_2 \in [0,80]} f_2(x_2, \lambda) + \inf_{x_3 \in [0,8]} f_3(x_3, \lambda) + 100\lambda$$

pour des fonctions f_1, f_2 et f_3 que vous expliciterez.

Solution : La fonction Lagrangienne du problème est donnée par :

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(100 - x_1 - x_2 - x_3),$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$ (écrite sous la forme $100 - x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$).

La fonction duale est alors :

$$q(\lambda) = \inf_{(x_1, x_2, x_3) \in X} L(x_1, x_2, x_3, \lambda).$$

Étant donné que la fonction Lagrangienne est séparable en x_1, x_2 et x_3 (c'est à dire qu'elle peut s'écrire comme une somme de termes tels que chaque terme implique au plus un des x_i), on peut écrire :

$$q(\lambda) = \inf_{x_1 \in [0,40]} f_1(x_1, \lambda) + \inf_{x_2 \in [0,80]} f_2(x_2, \lambda) + \inf_{x_3 \in [0,8]} f_3(x_3, \lambda) + 100\lambda,$$

avec :

$$f_1(x_1, \lambda) = x_1^2 - \lambda x_1, \quad f_2(x_2, \lambda) = x_2^2 - \lambda x_2, \quad f_3(x_3, \lambda) = x_3^2 - \lambda x_3.$$

3. On note $X_1 = [0, 40]$, $X_2 = [0, 80]$, et $X_3 = [0, 8]$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, donnez $x_i^* = \arg\min_{x_i \in X_i} f_i(x_i, \lambda)$ en fonction de λ, vous pouvez distinguer plusieurs cas de figure à chaque fois.

Solution : Pour chaque i, on cherche à minimiser $f_i(x_i, \lambda) = x_i^2 - \lambda x_i$ sur X_i. Calculons la dérivée de f_i par rapport à x_i :

$$f_i'(x_i, \lambda) = 2x_i - \lambda.$$

En annulant la dérivée, on obtient le minimiseur non contraint :

$$x_i = \frac{\lambda}{2}.$$

En tenant compte des bornes de X_i, le minimiseur x_i^* est donné par :

$$x_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 0, \\ \frac{\lambda}{2} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 2b_i, \\ b_i & \text{si } \lambda \geq 2b_i, \end{cases}$$

où b_i est la borne supérieure de X_i :

$$b_1 = 40, \quad b_2 = 80, \quad b_3 = 8.$$

4. Déduisez-en des formules explicites pour la fonction duale sur chacun des intervalles suivants pour λ : $[0, 16]$, $[16, 80]$, $[80, 160]$, $[160, +\infty[$.

Solution : Pour chaque intervalle, nous déterminons les valeurs de x_i^* :

Intervalle $\lambda \in [0, 16]$:

$$x_1^* = \frac{\lambda}{2}, \quad x_2^* = \frac{\lambda}{2}, \quad x_3^* = \frac{\lambda}{2}.$$

La fonction duale est :

$$q(\lambda) = 3\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) + 100\lambda = -\frac{3\lambda^2}{4} + 100\lambda.$$

Intervalle $\lambda \in [16, 80]$:

$$x_1^* = \frac{\lambda}{2}, \quad x_2^* = \frac{\lambda}{2}, \quad x_3^* = 8.$$

La fonction duale est :

$$q(\lambda) = 2\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) + (64 - 8\lambda) + 100\lambda = -\frac{\lambda^2}{2} + 64 + 92\lambda.$$

Intervalle $\lambda \in [80, 160]$:

$$x_1^* = 40, \quad x_2^* = \frac{\lambda}{2}, \quad x_3^* = 8.$$

La fonction duale est :

$$q(\lambda) = (1600 - 40\lambda) + \left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) + (64 - 8\lambda) + 100\lambda = -\frac{\lambda^2}{4} + 1664 + 52\lambda.$$

Intervalle $\lambda \in [160, +\infty[$:

$$x_1^* = 40, \quad x_2^* = 80, \quad x_3^* = 8.$$

La fonction duale est :

$$q(\lambda) = (1600 - 40\lambda) + (6400 - 80\lambda) + (64 - 8\lambda) + 100\lambda = 8064 - 28\lambda.$$

5. En utilisant le résultat de la question précédente, résolvez le problème dual.

Solution : $q(\lambda)$ étant constituée de segments polynômiaux, son maximum sera atteint soit en un point critique d'un segment, soit à la jonction entre deux segments, soit à une des extrémités de son intervalle de définition $[0, +\infty[$. Calculons la dérivée de q sur chaque intervalle et regardons les points critiques de q et le signe de q'.

Intervalle $\lambda \in [0, 16]$:

$$q'(\lambda) = -\frac{3\lambda}{2} + 100.$$

Annulons la dérivée : $-\frac{3\lambda}{2} + 100 = 0 \implies \lambda = \frac{200}{3} \approx 66.67$. Comme $\lambda \notin [0, 16]$ et comme q' est positive sur $[0, 16]$, le maximum sur cet intervalle est atteint en $\lambda = 16$.

Intervalle $\lambda \in [16, 80]$:

$$q'(\lambda) = -\lambda + 92.$$

Annulons la dérivée : $-\lambda + 92 = 0 \implies \lambda = 92$. Comme $\lambda \notin [16, 80]$ et comme q' est positive sur $[16, 80]$, le maximum sur cet intervalle est atteint en $\lambda = 80$.

Intervalle $\lambda \in [80, 160]$:

$$q'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} + 52.$$

Annulons la dérivée : $-\frac{\lambda}{2} + 52 = 0 \implies \lambda = 104$. Comme $104 \in [80, 160]$ et comme q' est positive sur $[80, 104]$ et négative sur $[104, 160]$, q atteint son maximum sur l'intervalle $[80,\ 160]$ en $\lambda = 104$.

Intervalle $\lambda \in [160, +\infty[$:

La fonction $q(\lambda)$ est strictement décroissante (pente négative) sur cet intervalle, donc le maximum sur cet intervalle est atteint en $\lambda = 160$.

Calculons les valeurs maximale atteintes par $q(\lambda)$ sur les différents intervalles :

$$q(16) = -\frac{3 \times 16^2}{4} + 100 \times 16 = 1408.$$

$$q(80) = -\frac{80^2}{2} + 64 + 92 \times 80 = 4224.$$

$$q(104) = -\frac{104^2}{4} + 1664 + 52 \times 104 = 4368.$$

$$q(160) = 8064 - 28 \times 160 = 3584.$$

On en déduit que le maximum de $q(\lambda)$ est atteint en $\lambda^* = 104$, avec $q(104) = 4368$.

6. Justifiez que la dualité forte s'applique à ce problème et utilisez les conditions d'optimalité vues en cours pour en déduire une solution du problème primal.

Solution : La fonction objectif est convexe, les contraintes sont linéaires et l'ensemble X est polyhédral (c'est à dire qu'on peut le voir comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés), donc la dualité forte s'applique.
Les conditions d'optimalité pour la dualité forte (KKT), nous donnent que pour tout solution x^* du problème primal :

$$2x_i^* - \lambda^* = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad x_i^* \in X_i,\ x_1^* + x_2^* + x_3^* \geq 100, \quad \lambda^* \geq 0,\ \lambda^*(100 - x_1^* - x_2^* - x_3^*) = 0.$$

De la première condition, on obtient :

$$x_i^* = \frac{\lambda^*}{2}.$$

En tenant compte des bornes, on a :

$$x_1^* = \min\left(\frac{\lambda^*}{2}, 40\right), \quad x_2^* = \min\left(\frac{\lambda^*}{2}, 80\right), \quad x_3^* = \min\left(\frac{\lambda^*}{2}, 8\right).$$

Avec $\lambda^* = 104$, on obtient :

$$x_1^* = \min(52, 40) = 40, \quad x_2^* = \min(52, 80) = 52, \quad x_3^* = \min(52, 8) = 8.$$

La contrainte primaire est satisfaite :

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* = 40 + 52 + 8 = 100.$$

Ainsi, l'unique solution optimale du problème primal est $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (40, 52, 8)$.

7. Voyez-vous une méthode plus simple qui aurait pu vous permettre de trouver cette solution ?

Solution : Oui, on peut observer que pour minimiser le coût total tout en satisfaisant la contrainte, il faut utiliser au maximum les employés ayant le coût marginal le plus faible par unité produite. Les coûts marginaux par unité sont proportionnels aux dérivées du coût par rapport à x_i, soit $2x_i$. Il est donc optimal de maximiser l'utilisation de l'employé 1 jusqu'à sa capacité maximale, puis de l'employé 2, et enfin de l'employé 3.
En utilisant pleinement l'employé 1 ($x_1 = 40$) et l'employé 3 ($x_3 = 8$), il reste à produire $100 - 40 - 8 = 52$ kg, qui seront produits par l'employé 2 ($x_2 = 52$).

8. Répondez à nouveau aux question 1 à 7 en modifiant le problème comme suit : le premier employé est maintenant payé $4x_1^2$ centimes d'euros à la fin de la journée, le second employé

$2x_2^2$ centime d'euros et le troisième $10x_3^2$ centime d'euros.

Solution :

(a) La réponse à la première question est identique.

(b) La fonction Lagrangienne associée au problème est :

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + \lambda(100 - x_1 - x_2 - x_3),$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $x_1+x_2+x_3 \geq 100$ (écrite sous la forme $100 - x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$).

La fonction duale est alors :

$$q(\lambda) = \inf_{(x_1,x_2,x_3)\in X} L(x_1, x_2, x_3, \lambda).$$

La fonction Lagrangienne est séparable en x_1, x_2 et x_3, ce qui nous permet d'écrire :

$$q(\lambda) = \inf_{x_1\in[0,40]} f_1(x_1, \lambda) + \inf_{x_2\in[0,80]} f_2(x_2, \lambda) + \inf_{x_3\in[0,8]} f_3(x_3, \lambda) + 100\lambda,$$

avec :

$$f_1(x_1, \lambda) = 4x_1^2 - \lambda x_1, \quad f_2(x_2, \lambda) = 2x_2^2 - \lambda x_2, \quad f_3(x_3, \lambda) = 10x_3^2 - \lambda x_3.$$

Solution : (continuée)

(c) Pour chaque i, nous minimisons $f_i(x_i, \lambda) = a_i x_i^2 - \lambda x_i$ sur X_i, avec $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 10$.

Calculons la dérivée de f_i par rapport à x_i :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 2a_i x_i - \lambda.$$

En annulant la dérivée, on obtient le minimiseur non contraint :

$$x_i = \frac{\lambda}{2a_i}.$$

En tenant compte des bornes de X_i, le minimiseur x_i^* est :

$$x_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 0, \\ \dfrac{\lambda}{2a_i} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 2a_i b_i, \\ b_i & \text{si } \lambda \geq 2a_i b_i, \end{cases}$$

où b_i est la borne supérieure de X_i :

$$b_1 = 40, \quad b_2 = 80, \quad b_3 = 8.$$

Donc :

$$x_1^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 0, \\ \dfrac{\lambda}{8} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 320, \\ 40 & \text{si } \lambda \geq 320, \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 0, \\ \dfrac{\lambda}{4} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 320, \\ 80 & \text{si } \lambda \geq 320, \end{cases}$$

$$x_3^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 0, \\ \dfrac{\lambda}{20} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 160, \\ 8 & \text{si } \lambda \geq 160. \end{cases}$$

Solution : (continuée)

(d) Nous distinguons les intervalles suivants pour λ :

1. Pour $\lambda \in [0, 160]$:

$$x_1^* = \frac{\lambda}{8}, \quad x_2^* = \frac{\lambda}{4}, \quad x_3^* = \frac{\lambda}{20}.$$

$$q(\lambda) = f_1(x_1^*, \lambda) + f_2(x_2^*, \lambda) + f_3(x_3^*, \lambda) + 100\lambda.$$

Calculons chaque terme :

$$f_1 = 4\left(\frac{\lambda}{8}\right)^2 - \lambda\frac{\lambda}{8} = \frac{\lambda^2}{16} - \frac{\lambda^2}{8} = -\frac{\lambda^2}{16},$$
$$f_2 = 2\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 - \lambda\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^2}{4} = -\frac{\lambda^2}{8},$$
$$f_3 = 10\left(\frac{\lambda}{20}\right)^2 - \lambda\frac{\lambda}{20} = \frac{\lambda^2}{40} - \frac{\lambda^2}{20} = -\frac{\lambda^2}{40}.$$

Donc :

$$q(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{16} - \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^2}{40} + 100\lambda = -\frac{17\lambda^2}{80} + 100\lambda.$$

2. Pour $\lambda \in [160, 320]$:

$$x_1^* = \frac{\lambda}{8}, \quad x_2^* = \frac{\lambda}{4}, \quad x_3^* = 8.$$

Calculons f_3 : $f_3 = 10 \times 8^2 - \lambda \times 8 = 640 - 8\lambda$.

Les autres f_i restent inchangés. Donc :

$$q(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{16} - \frac{\lambda^2}{8} + (640 - 8\lambda) + 100\lambda = -\frac{3\lambda^2}{16} + 92\lambda + 640.$$

Solution : (continuée)

3. Pour $\lambda \geq 320$:

$$x_1^* = 40, \quad x_2^* = 80, \quad x_3^* = 8.$$

Calculons :

$$f_1 = 4 \times 40^2 - \lambda \times 40 = 6400 - 40\lambda,$$

$$f_2 = 2 \times 80^2 - \lambda \times 80 = 12800 - 80\lambda,$$

$$f_3 = 640 - 8\lambda.$$

Donc :

$$q(\lambda) = (6400 - 40\lambda) + (12800 - 80\lambda) + (640 - 8\lambda) + 100\lambda = 19840 - 28\lambda.$$

Solution : (continuée)

(e) Nous cherchons à maximiser $q(\lambda)$ par rapport à $\lambda \geq 0$.

Sur l'intervalle $\lambda \in [0, 160]$:

$$q(\lambda) = -17\frac{\lambda^2}{80} + 100\lambda.$$

La dérivée est :

$$q'(\lambda) = -17\frac{\lambda}{40} + 100.$$

Annulons la dérivée :

$$\lambda = 4000/17 > 160.$$

Comme $\lambda = 4000/17$ n'est pas dans $[0, 160]$, le maximum sur cet intervalle est atteint en $\lambda = 160$.

Sur l'intervalle $\lambda \in [160, 320]$:

$$q(\lambda) = -\frac{3\lambda^2}{16} + 92\lambda + 640.$$

La dérivée est :

$$q'(\lambda) = -\frac{3\lambda}{8} + 92.$$

Annulons la dérivée :

$$\lambda = \frac{736}{3}.$$

Comme $\lambda = 736/3$ est dans $[160, 320]$, le maximum sur cet intervalle est atteint en $\lambda = 736/3$.

Sur l'intervalle $\lambda \geq 320$: $q(\lambda) = 19840 - 28\lambda$, qui est une fonction décroissante. Le maximum est donc atteint en $\lambda = 320$.

Calculons les valeurs de $q(\lambda)$ aux points critiques :

$$\begin{aligned}
q(160) &= -\frac{3 \times 160^2}{16} + 92 \times 160 + 640 = 10560, \\
q(736/3) &= -\frac{3}{16}\left(\frac{736}{3}\right)^2 + 92\left(\frac{736}{3}\right) + 640 = \frac{35776}{3} = 11925.333\ldots \\
q(320) &= -\frac{3 \times 320^2}{16} + 92 \times 320 + 640 = 10880.
\end{aligned}$$

Le maximum de $q(\lambda)$ est donc atteint en $\lambda^* = \frac{736}{3}$, avec $q\left(\frac{736}{3}\right) = \frac{35776}{3}$.

Solution : (continuée)

(f) L'argument pour l'obtention de la dualité forte reste le même.

Les condition d'optimalité (KKT) nous donnent que toute solution du problème primal $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ vérifie $x_1^* = \min\left(\frac{\lambda^*}{8}, 40\right)$, $x_2^* = \min\left(\frac{\lambda^*}{4}, 80\right)$ et $x_3^* = \min\left(\frac{\lambda^*}{20}, 8\right)$. Avec $\lambda^* = \frac{736}{3}$, on obtient finalement :

$$x^* = x_1^*, x_2^*, x_3^* = \frac{92}{3}, \frac{184}{3}, 8$$

Et on vérifie facilement que cette solution est faisable.

(g) Une méthode plus simple est moins évidente à trouver que dans le cas précédent. Des considérations d'utilité marginale égale des différents employés au point d'optimalité peuvent éventuellement fonctionner.

Exercice 8 Écart dual pour le problème du sac à dos. ($\star\star$)

On considère n objets avec des poids associés $w_1, w_2, \ldots, w_n$, et des valeurs associées $v_1, v_2, \ldots, v_n$. On veut sélectionner un sous-ensemble de ces objets tel que la somme des poids associés aux éléments de ce sous-ensemble ne dépasse pas un réel $A > 0$ donné et tel que la somme des valeurs associées aux éléments de ce sous-ensemble soit maximisée.

1. Montrer que le problème peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } f(x) = -\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \qquad \text{(Problème du sac à dos)}\\ &\text{avec } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq A \\ &\text{et pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_i \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

2. Trouver graphiquement la solution du problème dual et représenter graphiquement l'écart de dualité pour $n = 5$, $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$ et $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (3, 1, 6, 2, 5)$.
3. Calculer explicitement la fonction duale dans le cas général.
4. Trouver la solution du problème dual. (Indice : on peut faire l'hypothèse, sans perte de généralité, que $\frac{v_1}{w_1} \leq \frac{v_2}{w_2} \leq \cdots \leq \frac{v_n}{w_n}$ et étudier la valeur de la fonction duale en fonction de la position de son argument par rapport aux v_i/w_i.)

5. On considère maintenant le problème relaxé :

$$\begin{aligned}
&\text{minimiser } f(x) = -\sum_{i=1}^{n} v_i x_i && \text{(Problème du sac à dos relaxé)}\\
&\text{avec } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq A\\
&\text{et pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_i \in [0, 1].
\end{aligned}$$

   Justifier qu'il n'y a pas d'écart de dualité pour ce problème.

6. Montrer que le problème dual du problème relaxé atteint le même maximum que le problème dual du problème original.

7. Utiliser les conditions d'optimalité primale-duale vues en cours pour obtenir la solution du problème primal relaxé.

8. Montrer que cette solution est faisable pour le problème primal original et en déduire que :

$$q^* \leq f^* \leq q^* + \max_{1 \leq i \leq n} v_i,$$

   où f^* est la solution du problème primal original et q^* est la solution du problème dual original.