Optimisation

1. Optimisation sans contraintes
2. Optimisation sous contraintes
3. Analyse convexe et dualité

Optimisation sous contraintes

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \text{ subject to } \begin{cases} c_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} \end{cases}$$

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \text{pour tout } i \in \mathcal{E},\ c_i(x) = 0,\ \text{pour tout } j \in \mathcal{I},\ c_j(x) \leq 0\}$$

x^* est une solution locale du problème ssi $x^* \in \Omega$ et il existe un ensemble ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ contenant x^* tel que pour tout $x \in U \cap \Omega$, $f(x^*) \leq f(x)$

Condition nécessaire d'optimalité: intuition

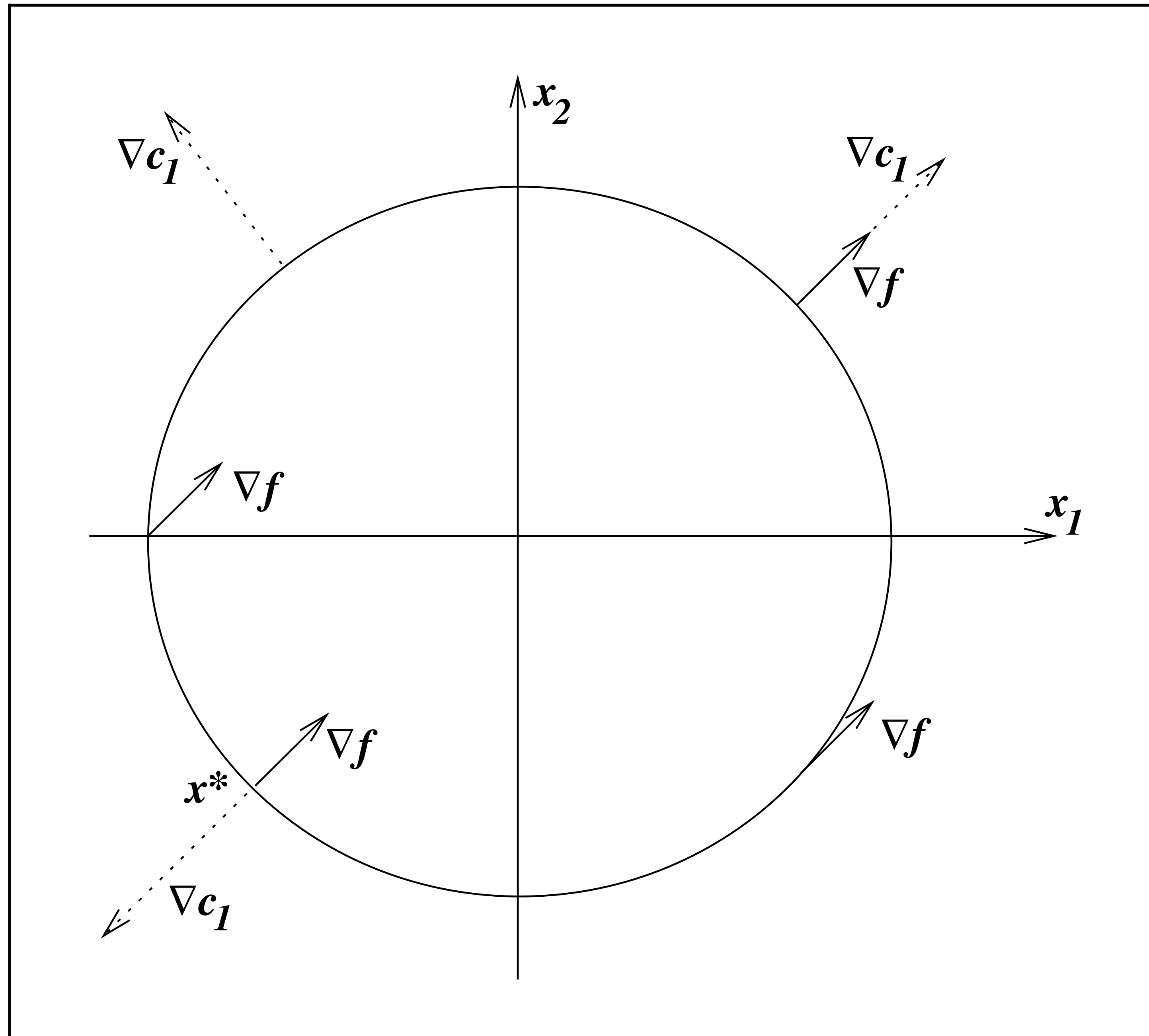
$$f : x_1, x_2 \mapsto x_1 + x_2$$

Cas d'une seule contrainte d'égalité

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

Condition nécessaire d'optimalité

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1^* \nabla c_1(x^*).$$



Condition nécessaire d’optimalité: intuition

$$f : x_1, x_2 \mapsto x_1 + x_2$$

Cas d’une seule contrainte d’inégalité

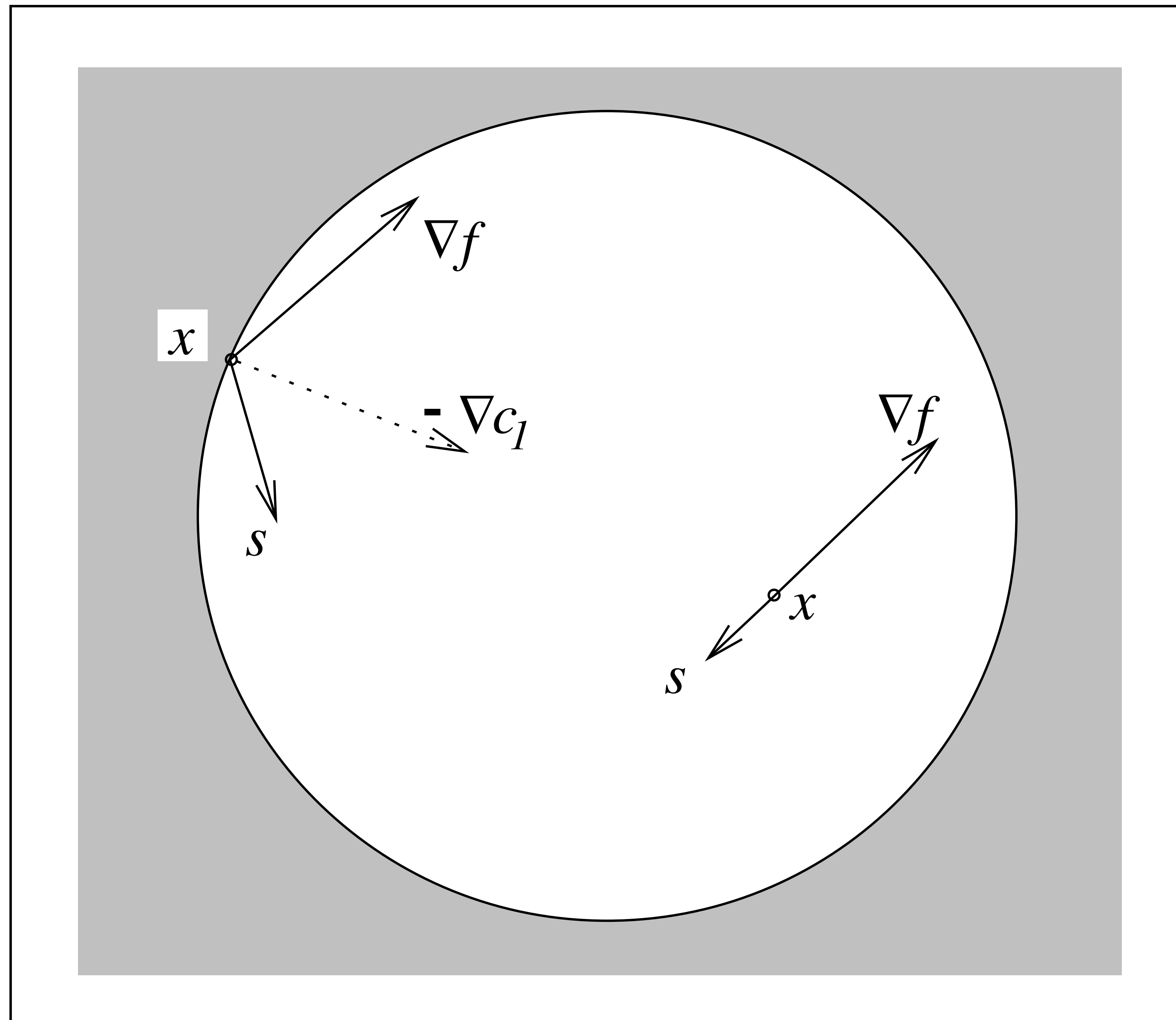
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2$$

Condition nécessaire d’optimalité

$$\nabla f(x^*) = -\lambda_1^* \nabla c_1(x^*)$$

$$\lambda_1^* \geq 0$$

$$\lambda_1^* c_1(x^*) = 0.$$



Cas général : KKT conditions

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x)$$

Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

$$\begin{aligned}
\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) &= 0, \\
c_i(x^*) &= 0, \quad \text{for all } i \in \mathcal{E}, \\
c_i(x^*) &\leq 0 \quad \text{for all } i \in \mathcal{I}, \\
\lambda_i^* &\geq 0, \quad \text{for all } i \in \mathcal{I}, \\
\lambda_i^* c_i(x^*) &= 0, \quad \text{for all } i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

Condition nécessaire d'optimalité: cas général

Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification (MFCQ)
(Plus d'exemples de qualifications des contraintes sur la feuille d'exercice numéro 1)

The gradients of the equality constraints are linearly independent at x^* and there exists a vector $d \in \mathbf{R}^n$ such that $\nabla c_i(x^*)^T d < 0$ for all **active** inequality constraints and $\nabla e_j(x^*)^T d = 0$ for all equality constraints.

Théorème : Si x^* est une solution locale et que la qualification des contraintes de Mangasarian-Fromovitz est respectée en x^* alors les conditions KKT sont vérifiées en x^*.

Optimisation

1. Optimisation sans contraintes
2. Optimisation sous contraintes
3. Analyse convexe et dualité

Convexité

L'ensemble X est convexe ssi pour tout x, y dans X, le segment $[x, y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$ est inclus dans X

Une fonction $f : X \subset \mathbf{R}^n \to R$ est convexe ssi X est convexe et pour tout x, y dans X et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si l'inégalité est stricte pour $t \in]0, 1[$, la fonction est dite *strictement* convexe.

Convexité

Reconnaître une fonction convexe

- les fonctions linéaires sont convexes
- les combinaisons linéaires positives de fonctions convexes sont convexes
- le maximum (point par point) d'un ensemble de fonctions convexes est convexe
- …

Si f est de classe C^2, f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f$ est semi-définie positive sur l'intérieur de X. Si $\nabla^2 f$ est définie positive sur l'intérieur de X, f est strictement convexe. $(X = \mathrm{dom} f)$

Existence et unicité du minimum

Théorèmes

Si f est convexe et minorée, alors f admet un minimum global.

Si f est une fonction *strictement* convexe définie sur un ensemble convexe $X \subset \mathbf{R}^n$, alors f admet au plus un minimum global.

Si f est une fonction convexe définie sur un ensemble convexe $X \subset \mathbf{R}^n$, alors tout minimum local de f est aussi un minimum global de f. Si X est ouvert, alors $\nabla f(x^*) = 0$ est équivaut à x^* est un minimum global de f

Dualité

Problème considéré

$$\text{minimize} \quad f(x)$$
$$\text{subject to} \quad x \in X, \qquad g_j(x) \le 0, \quad j = 1, \ldots, r,$$

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$
$$g_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$
$$X \subset \mathbf{R}^n$$

$$f^* = \inf_{\substack{x \in X \\ g_j(x) \le 0,\, j=1,\ldots,r}} f(x).$$

$$-\infty < f^* < +\infty$$

Il existe x^*, tel que $f(x^*) = f^*$

Dualité

Lagrangien associé au problème

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j(x) = f(x) + \mu' g(x).$$

Dualité

Fonction duale

$$q(\mu) = \inf_{x \in X} L(x, \mu).$$

Problème dual

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad q(\mu) \\ &\text{subject to} \quad \mu \geq 0, \ \mu \in D, \end{aligned}$$

$$D = \{\mu \mid q(\mu) > -\infty\}.$$

Résultats

Proposition 5.1.2: The domain D of the dual function q is convex and q is concave over D.

Proposition 5.1.3: (Weak Duality Theorem) We have

$$q^* \leq f^*.$$

Dualité

Dualité forte et qualification des contraintes

Example :

Si f est convexe et les contraintes g_j sont linéaires, alors il n'y a pas d'écart dual: $q^* = f^*$

Dualité

If **conditions for strong duality are met** and (x^*, μ^*) are such that $L(x^*, \mu^*) = f^* = q^*$, then (x^*, μ^*) is said to be an optimal solution Lagrange multiplier pair.

Proposition 5.1.5: (Optimality Conditions) (x^*, μ^*) is an optimal solution-Lagrange multiplier pair if and only if

$$x^* \in X, \quad g(x^*) \leq 0, \qquad \text{(Primal Feasibility)}, \tag{5.4}$$

$$\mu^* \geq 0, \qquad \text{(Dual Feasibility)}, \tag{5.5}$$

$$x^* = \arg\min_{x \in X} L(x, \mu^*), \qquad \text{(Lagrangian Optimality)}, \tag{5.6}$$

$$\mu_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, r, \qquad \text{(Complementary Slackness)}. \tag{5.7}$$