Séance 1 :
Mathématiques pour l'Intelligence Artificielle

Thomas Schatz
Résumé par Manon Girard & Paul Peyssard

Lundi 4 septembre 2023

Master 2 Intelligence Artificielle & Apprentissage Automatique
Aix-Marseille Université

Contents

1 Notions de bases sur les preuves

Savoir réaliser et comprendre des preuves mathématique peut s'avérer important afin de lire la littérature (mathématique, machine learning...) et de pouvoir expliquer ses recherches et avancées scientifique.

1.1 Généralités sur les preuves mathématiques

Lorsque l'on écrit une démonstration, il est important de commencer par **formaliser les hypothèses et le résultat à prouver**. A partir de là, il faut montrer que ces hypothèses impliquent logiquement le résultat. Pour ce faire, il est important d'utiliser uniquement les résultats (théorèmes, axiomes, etc.) établis, et les règles de raisonnement logique.

Pour réaliser une preuve, voici quelques conseils:

- Identifier les objets mathématiques impliqués et les nommer de manière le plus naturelle possibles. *Ex.: On utilise souvent les lettres f,g,h pour désigner des fonction, les lettres u et v pour des vecteurs.*
- Etudier le cas de plusieurs exemples pour tenter de trouver une intuition.
- Ecrire formellement les différentes définitions et caractéristiques de chaque notion aborder afin d'identifier des possibles chemins de preuves.

De plus, il est important de savoir qu'il existe plusieurs structures, ou méthodes, de preuves qui reviennent régulièrement. Nous allons en lister quelques-unes.

1.2 La preuve directe

Cette méthode consiste à démontrer directement une affirmation en utilisant des règles logiques et des étapes de raisonnement pour arriver à une conclusion.

Exemple : Prouver que la somme de deux nombres impairs est paire

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux nombres impairs. Par définition, on a :

$$\exists n_1 \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = 2n_1 + 1$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = 2n_2 + 1$$

Notons $S = a + b$. Montrons que S est pair, c'est-à-dire, qu'il existe $n_3 \in \mathbb{Z}$ tel que $S = 2n_3$. Or,

$$\begin{aligned} a + b &= (2n_1 + 1) + (2n_2 + 1) \\ &= 2n_1 + 2n_2 + 2 \\ &= 2(n_1 + n_2 + 1) \end{aligned}$$

On pose $n_3 = n_1 + n_2 + 1$. Ainsi, on obtient bien que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.$\square$

Cette structure est la plus naturelle, cependant elle n'est pas toujours évidente à mettre en pratique, c'est pourquoi il est important d'en connaitre d'autre pour faciliter les raisonnements.

1.3 Preuve par disjonction de cas

Lorsqu'une preuve directe n'est pas immédiatement évidente, on peut diviser le problème en plusieurs cas possibles et démontrer que chacun d'eux mène à la même conclusion.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 + n$ *est pair.*

Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrons que $n^2 + n$ est pair.
Autrement dit, montrons la chose suivante: $\exists k \in \mathbb{Z}, n^2 + n = 2k$.
On remarque que : $n^2 + n = n(n + 1)$.

On raisonne par disjonction de cas.

- *Cas 1.* n est pair. C'est-à-dire : $\exists k' \in \mathbb{Z}, n = 2k'$ Dans ce cas, $n^2 + n = 2k'(2k' + 1)$
  On pose $k = k'(2k' + 1)$. Ainsi, on a $\exists k \in \mathbb{Z}, n^2 + n = 2k$. Et donc, $n^2 + n$ est pair.

- *Cas 2.* n est impair. C'est-à-dire : $\exists k' \in \mathbb{Z}, n = 2k' + 1$ Dans ce cas, $n^2 + n = (2k' + 1)(2k' + 1 + 1) = (2k' + 1)(2k' + 2) = 2(2k' + 1)(k' + 1)$
  On pose $k = (2k' + 1)(k' + 1)$. Ainsi, on a $\exists k \in \mathbb{Z}, n^2 + n = 2k$. Et donc, $n^2 + n$ est pair.

Dans les deux cas, nous avons prouvé que $n^2 + n$ est pair. $\square$.

1.4 Preuve par récurrence

La preuve par récurrence est utilisée pour démontrer qu'une affirmation est vraie pour tous les membres d'une séquence infinie, en prouvant d'abord qu'elle est vraie pour le premier membre, puis en montrant que si elle est vraie pour un membre, elle l'est aussi pour le suivant. Le structure de ce type de preuve est la suivante :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la propriété *(notre propriété au rang n)*. On veut démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie.
ATTENTION. Parfois, le premier n'est pas forcément, il est important de bien identifier le point de départ.

Initialisation. Montrons que P_0 est vraie.
...
Hérédité. On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n > 0$. Montrons qu'elle est aussi vraie au rang $n + 1$.
... en utilisant l'hypothèse de réccurence (c'est à dire P_n) ....
Conclusion. Par récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n+1} + 5$ *est un multiple de 7.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la propriété : $\exists k \in \mathbb{Z}, 2^{3n+1} + 5 = 7k$. On veut démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie.

Initialisation. Montrons que P_0 est vraie.
Pour $n = 0$, on a : $2^{3n+1} + 5 = 2^1 + 5 = 7$. Or 7 est bien un multiple de lui-même.
Ainsi, P_0 est vérifiée.
Hérédité. On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n > 0$. Montrons qu'elle est aussi vraie au rang $n + 1$.
On a, $2^{3(n+1)+1} + 5 = 2^{3n+1+3} + 5 = 2^3 2^{3n+1} + 5$
Or, P_n est vraie par hypothèse de récurrence, donc $\exists k \in \mathbb{Z}, 2^{3n+1} + 5 = 7k \Leftrightarrow 2^{3n+1} = 7k - 5$
Ainsi, $2^{3(n+1)+1} + 5 = 8(7k - 5) + 5 = 7.8k - 35 = 7(8k - 5)$
Et donc, $\exists k' = 8k - 5, 2^{3(n+1)+1} + 5 = 7k'$. Ainsi, P_{n+1} est vérifiée.
Conclusion. Par récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n. On a donc montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n+1} + 5$ est un multiple de 7. $\square$

1.5 Preuve par l'absurde

Cette méthode suppose initialement que l'affirmation à prouver est fausse, puis on montre que cela conduit à une contradiction logique, prouvant ainsi que l'affirmation est vraie.

Exemple : Si a un nombre rationnel et b un nombre irrationnel, alors $a + b$ est irrationnel.

Soient $a \in \mathbb{Q}$, $b \notin \mathbb{Q}$. On raisonne par l'absurde. Supposons que $a + b \in \mathbb{Q}$.
Dans ce cas, $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, a + b = \frac{p}{q}$.
Or, $a \in \mathbb{Q}$, donc $\exists (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, a = \frac{p'}{q'}$
Ainsi, $a + b = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{p'}{q'} + b = \frac{p}{q} \Leftrightarrow b = \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow b = \frac{pq' - p'q}{qq'}$
Ceci signifie que $b \in \mathbb{Q}$ ce qui est en contradiction avec le fait que b est irrationnel.
On conclu que notre hypothèse initiale est fausse, et donc $a + b$ est irrationnel. $\square$.

1.6 Preuve par contraposée

Lors que la propriété que l'on souhaite prouver contient une implication, on peut tenter de raisonner par contraposée. Autrement dit, si on dispose de deux propriétés P et Q, et qu'on souhaite montrer que $P \Rightarrow Q$, on peut décider de démontrer la contraposée qui correspond à $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 + n^3 + n^4 + 2$ *est pair* $\Rightarrow$ n *est pair.*

On raisonne par contraposée. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrons que : $nestimpair \Rightarrow n^2 + n^3 + n^4 + 2estimpair$.

On suppose que n est impair, c'est-à-dire, $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$.
Ainsi, on déduit :

$$\begin{aligned}
n^2 + n^3 + n^4 + 2 &= (2k+1)^2 + (2k+1)^3 + (2k+1)^4 + 2 \\
&= 16k^4 + 40k^3 + 40k^2 + 16k + 5 \\
&= 16k^4 + 40k^3 + 40k^2 + 16k + 4 + 1 \\
&= 2(8k^4 + 20k^3 + 20k^2 + 8k + 1) + 1
\end{aligned}$$

On conclu qu'il existe $k' = 8k^4 + 20k^3 + 20k^2 + 8k + 1 \in \mathbb{Z}, n^2 + n^3 + n^4 + 2 = 2k' + 1$. Et donc, $n^2 + n^3 + n^4 + 2$ est impair.

Ceci conclu la preuve. $\square$.

1.7 Contre-exemple

Cette méthode consiste à prendre un exemple concret qui réfute la propriété qu'on tente de montrer. Ainsi, on conclu que la propriété est fausse.

Exemple : Tous les nombres premiers sont impairs.

2 est un nombre premier, qui plus est pair. Nous avons un contre-exemple qui prouve que tous les nombres premiers ne sont pas impairs. $\square$.

2 Language logico-mathématique

Il existe de nombreux connecteurs logique, quantificateurs, théories des ensemble pour simplifier la résolution de problèmes et raccourcir leur longueur. :

- Connecteurs logiques :
  - $\wedge$ *(Et)*
  - $\vee$ *(Ou)*
  - $\neg$ *(Non)*
  - $\Rightarrow$ *(Implication)*
  - $\Leftrightarrow$ *(Equivalence)*
- Quantificateurs :
  - $\forall$ *(Pour tout)*
  - $\exists$ *(Il existe)*
  - $\exists!$ *(Il existe un unique)*
- Théorie des ensembles :
  - $\subseteq$ *(Inclusion)*
  - $\subset$ *(Inclusion stricte)*
  - $\cap$ *(Intersection)*
  - $\cup$ *(Union)*
  - $\setminus$ *(Exclusion)*
  - $\in$ *(Appartenance)*
  - $\notin$ *(Non appartenance)*

3 Algèbre linéaire

3.1 Espaces vectoriels et fonctions linéaires

3.1.1 Définition d'une fonction mathématiques

On définit une fonction mathématique f comme le triplet (E, F, G) tel que $G \subset E * F$ et pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$
On notera alors :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

3.1.2 Cas des fonction linéaire

Soit $f = (E, F, G)$ une fonction. On dit que f est linéaire si, et seulement si, E et F sont des espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ et que : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u, v) \in E^2$,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Les fonctions linéaires sont l'objet central de l'algèbre linéaire (du point de vue conceptuel). Ce sont des fonctions qui préservent les combinaisons linéaires.

3.1.3 Espace vectoriel

On définit un espace vectoriel comme le quadruplet $(E, \mathbb{K}, +, .)$, où $\mathbb{K}$ est un corps et :

$$+ : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & E \\ x, y & \mapsto & x + y \end{array} \right. \qquad . : \left| \begin{array}{ccc} K \times E & \rightarrow & E \\ \alpha, x & \mapsto & \alpha . x \end{array} \right.$$

et tels que, $\exists 0_E \in E,\ \forall(u, v, w) \in E^3, \forall(\alpha, \beta) \in K^2, \exists u^{-1} \in E$ tels que :

- $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(associativité)*
- $u + v = v + u$ *(commutativité)*
- $u + 0_E = u$ *(élément neutre)*
- $u + u^{-1} = 0_E$ *(inverse)*
- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ *(comptabilité)*
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ *(distributivité)*
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(distributivité)*
- $1_k u = u$ *(identité multiplicative)*

Voici quelques exemples d'espaces vectoriels bien connus:

- Espaces Euclidien : $\mathbb{R}^n$
- Espaces Hermitiens : $\mathbb{C}^n$
- Espaces des fonctions continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles : $C^0([a, b], \mathbb{R})$

3.1.4 Notions élémentaires sur les espaces vectoriels

Voici quelques définitions importantes concernant les espaces vectoriels.

- **Vect() :** Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $(v_i)_{i\in I} \in E^I$:
  - $Vect((v_i)_{i\in I}) = \left(\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i | (\lambda_i)_{i\in I} \in K^I, avec\ un\ nombre\ fini\ de\ \lambda_i non\ nuls\right)$
- **Indépendance linéaire :** $v \in E$ est linéairement indépendant de $(v_i)_{i\in I} \in E^I$ si, et seulement si, v n'appartient pas à $Vect((v_i)_{i\in I})$
- **Famille libre :** Une famille de vecteur $(v_i)_{i\in I} \in E$ est dite libre si, et seulement si pour tout $j \in I, v_j$ est linéairement indépendant de $(v_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$
- **Base :** $(v_i)_{i\in I}$ est un base de E si, et seulement si, $(v_i)_{i\in I}$ est une famille libre de E telle que $E = Vect((v_i)_{i\in I})$ (i.e. la famille $(v_i)_{i\in I}$ engendre E).
- **Dimension finie :** Un espace vectoriel E est dit de dimension finie si, et seulement si, il existe une base de E de formée d'un nombre fini de vecteurs.
  De plus, si E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique entier naturel n, la dimension de E, tel que toute base de E est formée de exactement n vecteurs.

Il est important de savoir que l'indépendance linéaire, définie plus haut, possède une autre caractérisation :
Soit $(v_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E.

- S'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ de scalaires avec au plus un nombre fini de λ_i non nuls et telle que:
  1. $\exists i \in I, \lambda_i \neq 0$
  2. $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$

  alors $(v_i)_{i\in I}$ est une famille liée.
- Si pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ de scalaires avec au plus un nombre fini de λ_i non nuls, on a:

$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0\right) \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

  alors $(v_i)_{i\in I}$ est une famille libre.

3.1.5 Décomposition sur une base

Soit une base de $V = (v_i)_{i\in I}$ de E et $\Lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires telle qu'au plus un nombre fini des λ_i soient non nuls.
On dit que Λ est une décomposition de $v \in E$ sur la base V si, et seulement si, $v = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i$

Théorème (existence et unicité de la décomposition) : Etant donnée une base V = $(v_i)_{i\in I}$ de E, tout vecteur $v \in E$ peut être décomposé sur cette base et cette décomposition est unique.

Ce qui resulte du théorème précédant est que **toute base peut donc servir de systeme de coordonées pour E**.

3.2 Matrices

Les matrices sont l'objet central de l'algèbre linéaire (en pratique). L'idée générale est simplement un tableau de nombres ou d'éléments en deux dimensions.

Soit A une matrice de taille $m \times n$ est représentée de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

On notera $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est le corps dans lequel se trouve les coefficients de la matrice A.

Les matrices sont utiles car elle permettent de représenter les fonctions linéaires en dimensions finie de manière simple à appréhender et pratique pour les calculs.

3.2.1 Produit matriciel

Pour une matrice M de dimensions $m \times n$ et un vecteur colonne $\mathbf{v}$ de dimension n, l'opération de multiplication matricielle $(M\mathbf{v})$ peut être exprimée comme :

$$(M\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \cdot v_j$$

Pour deux matrices A et B, le produit matrice-matrice est défini tel que :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

ATTENTION. Pour multiplier deux matrices, il faut que le nombre de colonne de la première corresponde au nombre de ligne de la deuxième.

Voici quelques propriétés concernant le produit matriciel:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ *(associativité)*
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(distributivité à gauche)*
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ *(distributivité à droite)*
- $c \cdot (A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$ *(multiplication matricielle par un scalaire)*

3.2.2 Transposée

La transposée d'une matrice A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Les lignes deviennent les colonnes et les colonnes deviennent les lignes. On note la transposée A^T.

Quelques propriétés intéressantes concernant le calcul de transposée:

- Transposée de la somme :
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
- Transposée d'une matrice multipliée par un scalaire :
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

- Transposée du produit de deux matrices :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

ATTENTION. $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$

Exemple de transposé:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Matrice d'une fonction linéaire

On peut définir ce qu'est une matrice d'application linéaire. Soient :

- E, F deux espaces vectoriels de dimension finie respectivement p et n,
- $V = (v_1, ..., v_p)$ une base de E,
- $W = (w_1, ..., w_n)$ une base de F,
- $f : E \to F$ une fonction linéaire,
- $M = M(f, V, W)$ matrice de f de V vers W, telle que

$$\mathrm{M} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \\ \leftarrow w_i \\ \\ \leftarrow w_n \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & & f(v_j) & & f(v_p) \end{array} & \end{array}$$

On dira que M est la matrice de l'application linéaire f représentée dans les bases V et W.

L'évaluation en un point d'une fonction linéaire et la composition d'application linéaire se réduit, dans le cas de la dimension finie, à l'application "mécanique" de règles de calcul matriciel. Ce qui justifie ce que l'on disait en introduction de cette partie sur les matrices.

Exemple. $V = (1, X, X^2)$ base de $\mathbb{R}_2[X]$, et $W = (1, X, X^2, X^3)$ base de $\mathbb{R}_3[X]$. On pose:= :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \mapsto & f(P) = (a_2 + a_0) X^3 + a_1 X^2 + a_0 \end{array} \right.$$

On calcule les images de chaque élément de la base V :

- $f(1) = 1 + X^3$
- $f(X) = X^2$
- $f(X^2) = X^3$

On déduit quelles sont les coordonnées de chacune de ses images associées à la base W:

- $[f(1)]_W = (1, 0, 0, 1)$
- $[f(X)]_W = (0, 0, 1, 0)$
- $[f(X^2)]_W = (0, 0, 0, 1)$

De là, on déduit la matrice de l'application linéeaire f qui est :

$$M(f, V, W) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.4 Changement de base

Toute base peut servir de système de coordonnées pour E. Un changement de base équivaut à un changement de système de coordonnées.

La matrice de passage de V à W, notée $P(V, W)$, est définie comme suit : elle transforme un vecteur v exprimé en termes de ses coordonnées dans V en le même vecteur exprimé en termes de ses coordonnées dans W.
Pour la trouver, les colonnes de $P(V, W)$ sont les coordonnées des éléments de V (dans un ordre fixé) dans W. Mathématiquement, cela s'exprime comme suit :

$$P(V, W) = M(\mathrm{Id}_E, V, W)$$

Où Id_E représente l'identité linéaire de l'espace vectoriel E, et $M(\mathrm{Id}_E, V, W)$ est la matrice qui effectue la transformation de V à W.

Exemple. Soient $E = (e_1, e_2), B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.
On souhaite trouver la matrice de passage de E vers B, notée $P(E, B)$.
On pose $e_1 = (x_1, y_1)$ et $e_2 = (x_2, y_2)$. On cherche les valeurs de x_1, y_1, x_2, y_2 telles que :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 b_1 + y_1 b_2 \\ e_2 = x_2 b_1 + y_2 b_2 \end{cases}$$

Avec quelques opérations sur ce système, on obtient:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} \\ y_1 = \frac{2}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{5} \\ y_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

De là, on déduit la matrice de passage:

$$P(E, B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

3.2.5 Matrice par blocs

Soit la matrice M de taille 5x5 :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 9 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 4 & 6 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons diviser cette matrice en blocs de différentes tailles :
Bloc P_{11} de taille 2x2 :

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Bloc P_{12} de taille 2x3 :

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Bloc P_{21} de taille 3x2 :

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Bloc P_{22} de taille 3x3 :

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice complète partitionnée peut être écrite comme la matrice:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

ATTENTION. Les dimensions des blocs doivent correspondrent.

3.2.6 Interprétation des opérations matricielles

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$:
Si nous décomposons A en colonnes, nous avons :

$$A = [a_1 \dots a_n]$$

Alors, l'opération $y = Ax$ peut être interprétée comme suit :

$$y = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Cela signifie que le vecteur y est obtenu en effectuant une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A avec les coefficients du vecteur x.

Si nous décomposons A en lignes, nous avons :

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \tilde{a}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^T \end{bmatrix}$$

où $\tilde{a}_i^T$ représente la transposée de la colonne i de A.
Alors, l'opération $y = Ax$ peut être interprétée comme suit :

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T x \\ \tilde{a}_2^T x \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^T x \end{bmatrix}$$

Cela signifie que le vecteur y est obtenu en effectuant une combinaison linéaire des lignes de la matrice A avec les composantes du vecteur x.

Autres définition :

- $c_{ij} = \tilde{a}_i^T \cdot b_j = \langle \tilde{a}_i, b_j \rangle$
- $C = [c_1 \dots c_p] = AB = [Ab_1 \dots Ab_p]$
- $C = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{c}_m^T \end{bmatrix} = AB = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{bmatrix}$
- $C = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i \cdot \tilde{b}_i$