Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 4

Année 2023-24

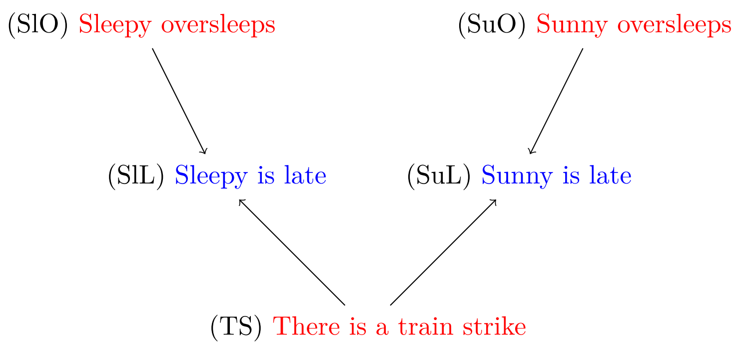
Probabilités.

1 Notions de base

Exercice 1 Propriétés élémentaires. ($\star$)

1. Prouvez que si A et B sont des événements indépendants, $P(A|B) = P(A)$.
2. On considère une fonction f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Quelles conditions doit-elle vérifier pour être une fonction de répartition valide ? Une densité de probabilité valide ?
3. Représentez graphiquement la fonction de masse, la densité de probabilité et la fonction de répartition pour une variable aléatoire X uniforme sur $[0, 1]$.
4. Même question pour X valant 1 avec probabilité .5, 2 avec probabilité .3 et 4 avec probabilité .2.
5. Un coffre A contient 100 pièces d'or. Un coffre B contient 60 pièces d'or et 40 pièces d'argent. Vous choisissez un coffre aléatoirement selon une loi uniforme et tirez une pièce aléatoirement selon une loi uniforme dans ce coffre. Si la pièce est en or, quelle est la probabilité que vous ayez choisi le coffre A ?

Exercice 2 Calcul probabiliste. ($\star\star$)



Considérons le modèle graphique représenté ci-dessus. SlO, SuO, SlL, SuL and TS sont des variables aléatoire binaires prenant leurs valeurs dans $\{0, 1\}$. Dans cet exercice nous allons essayer de déterminer ce qui peut être inféré sur les variables latentes (en rouge) à partir de l'observation des variables observées (en bleu).

Nous faisons l'hypothèse que si au moins un des deux évènements "Sleepy oversleeps" et "There is a train strike" a lieu, alors 'Sleepy is late' a lieu également (avec probabilité 1). De façon similaire, si au moins un des deux évènements 'Sunny oversleeps' et 'There is a train strike' a lieu, alors 'Sunny is late' a lieu également (avec probabilité 1). Nous pouvons l'écrire plus formellement, de la manière suivante :

$$P(SlL = 1|SlO = a, TS = b) = a \vee b,$$

et :

$$P(SuL = 1|SuO = a, TS = b) = a \vee b,$$

pour tout a, b dans $\{0, 1\}$. Le symbole $\vee$ représente le connecteur logique *ou* (inclusif) de $\{0, 1\}$ vers $\{0, 1\}$.

On note $l = P(SlO = 1)$, $u = P(SuO = 1)$ et $t = P(TS = 1)$.

1. Donner la factorisation de $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$ d'après le modèle graphique representé ci-dessus.

   Solution : D'après le modèle graphique representé ci-dessus :

   $$P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS) = P(SlL \mid SlO, TS)P(SuL \mid SuO, TS)P(SlO)P(SuO)P(TS).$$

2. La distribution de probabilité $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$ est-elle entièrement déterminée si les valeurs de l, u et t sont données ?

   Solution : SlO, SuO et TS étant des variables binaires, leur distribution est entièrement déterminée par la donnée de, respectivement, l, u et t. Comme SlL et SuL sont des variables binaires $P(SlL \mid SlO, TS)$ et $P(SuL \mid SuO, TS)$ sont entièrement déterminées respectivement par les formules $P(SlL = 1 \mid SlO = a, TS = b) = a \vee b$ et $P(SuL = 1 \mid SuO = a, TS = b) = a \vee b$.
   En appliquant la formule obtenue à la question précédente pour la distribution de probabilité $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$, on conclut donc que cette distribution est bien entièrement déterminée par la donnée de l, u et t.

3. Calculer $P(TS = 1|SlL = 1)$ en fonction de l, u et t.

Solution : On a :

$$\begin{aligned}P(TS=1 \mid SlL=1) &= \frac{P(TS=1, SlL=1)}{P(SlL=1)} \\ &= \frac{\sum_{SuL,SuO,SlO} P(SlL=1, SuL, SlO, SuO, TS=1)}{\sum_{SuL,SuO,SlO,TS} P(SlL=1, SuL, SlO, SuO, TS)}.\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{SuL,SuO,SlO} P(SlL=1, SuL, SlO, SuO, TS=1) = tAB,$$

avec :

$$\begin{aligned}A &:= \sum_{SuL,SuO} P(SuL \mid SuO, TS=1)P(SuO) \\ &= 0 + \sum_{SuO} P(SuO) = 1\end{aligned}$$

et :

$$B := \sum_{SlO} P(SlL=1 \mid SlO, TS=1)P(SlO) = \sum_{SlO} P(SlO) = 1.$$

Donc : $\sum_{SuL,SuO,SlO} P(SlL=1, SuL, SlO, SuO, TS=1) = t$.

Solution : (continuée)

D'où :

$$\sum_{SuL,SuO,SlO,TS} P(SlL=1,SuL,SlO,SuO,TS) = \sum_{SuL,SuO,SlO} P(SlL=1,SuL,SlO,SuO,TS=0)+t.$$

Or :

$$\sum_{SuL,SuO,SlO} P(SlL=1,SuL,SlO,SuO,TS=0) = (1-t)CD,$$

avec :

$$\begin{aligned}C &:= \sum_{SuL,SuO} P(SuL \mid SuO,TS=0)P(SuO)\\ &= P(SuL=0 \mid SuO=0,TS=0)P(SuO=0) + P(SuL=1 \mid SuO=1,TS=0)P(SuO=1)+0+0\\ &= 1-u+u=1\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}D &:= \sum_{SlO} P(SlL=1 \mid SlO,TS=0)P(SlO)\\ &= 0+p(SlO=1)=l.\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{SuL,SuO,SlO} P(SlL=1,SuL,SlO,SuO,TS=0) = (1-t)l.$$

Et finalement :

$$P(TS=1 \mid SlL=1) = \frac{t}{t+l-tl}.$$

4. Calculer $P(SlO=1|SlL=1)$ en fonction de l, u et t.

Solution : Similar computations lead to :

$$P(SlO=1 \mid SlL=1) = \frac{l}{t+l-tl}.$$

5. Calculer $P(TS=1|SlL=1,SuL=1)$ en fonction de l, u et t.

Solution : Similar computations lead to :

$$P(TS=1 \mid SlL=1,SuL=1) = \frac{t}{t+lu-ltu}.$$

6. Calculer $P(SlO=1|SlL=1,SuL=1)$ en fonction de l, u et t.

Solution : Similar computations lead to :

$$P(SlO = 1 \mid SlL = 1, SuL = 1) = \frac{l(t + u - tu)}{t + lu - ltu}.$$

7. Supposer à présent que $l = 0.5$, $t = 0.1$ et que l'évenement 'Sleepy is late' a lieu. Quel évènement est alors le plus probable : 'There is a train strike' ou 'Sleepy overslept' ?

Solution :

$$P(TS = 1 \mid SlL = 1) = \frac{t}{t + l - tl} = 0.1/(0.1 + 0.5 - 0.05) = 2/11 \approx .18$$

$$P(SlO = 1 \mid SlL = 1) = \frac{l}{t + l - tl} = 0.5/(0.1 + 0.5 - 0.05) = 10/11 \approx .91$$

L'évenement le plus probable est 'Sleepy overslept'.

8. Même question si on suppose en plus que $u = 0.01$ et que l'évènement 'Sunny is late' est également observé.

Solution :

$$P(TS = 1 \mid SlL = 1, SuL = 1) = \frac{t}{t + lu - ltu} = 200/209 \approx .96$$

$$P(SlO = 1 \mid SlL = 1, SuL = 1) = \frac{l(t + u - tu)}{t + lu - ltu} = 109/209 \approx .52$$

L'évenement le plus probable est à présent 'There is a train strike'.

9. Que se passe-t-il si on prend $l = 0.5$, $t = 0.1$ et $u = 0.2$?

Solution : On a :

$$P(TS = 1 \mid SlL = 1, SuL = 1) = \frac{t}{t + lu - ltu} = 10/19 \approx .53$$

$$P(SlO = 1 \mid SlL = 1, SuL = 1) = \frac{l(t + u - tu)}{t + lu - ltu} = 14/19 \approx .74$$

Si 'Sunny oversleeps' est suffisamment probable relativement à 'There is a train strike', l'observation qu'à la fois Sunny et Sleepy sont en retard ne rend pas la probabilité qu'il y ait eu un grève de train plus élevée que la probabilité que Sleepy ne se soit pas réveillé à l'heure.

2 Calculs de moment

Exercice 3 Preuve de propriétés vues en cours. ($\star\star$)

1. Montrez que $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$

2. Prouvez la loi de l'espérance totale.

3. Prouvez la loi de la variance totale.

Exercice 4 Espérance et variance d'estimateurs classiques. ($\star\star$)

Soit n un entier naturel et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Par souci de simplicité, on suppose que tous les moments des ces variables aléatoires existent. On note

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et

$$\hat{V} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2$$

1. Montrez que

$$\hat{V} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right) - \hat{\mu}^2$$

Solution : On développe les carrés et on regroupe les termes en trois sommes, puis on factorise et on reconnaît la définition de la moyenne empirique :

$$\begin{aligned}
\hat{V} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2\hat{\mu} X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{\mu}^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\hat{\mu} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) + \hat{\mu}^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\hat{\mu}\hat{\mu} + \hat{\mu}^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2.
\end{aligned}$$

2. Exprimez l'espérance de $\hat{\mu}$ comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (prouvez votre résultat)

Solution : Notons $\mu_i := \mathbf{E}[X_i]$ pour $i = 1 \ldots n$. Par linéarité de l'ésperance :

$$\mathbf{E}[\hat{\mu}] := \mathbf{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i.$$

On suppose à présent que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent toute la même distribution (elles sont donc i.i.d. puisqu'on a déjà supposé qu'elles étaient indépendantes).

3. Répondez à nouveau à la question précédente dans ce cadre plus simple.

Solution : Notons $\mu := \mathbf{E}[X_i]$ pour $i = 1 \dots n$.

On a à présent :

$$\mathbf{E}[\hat{\mu}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

4. Exprimez la variance de $\hat{\mu}$ comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ (prouvez votre résultat)

Solution : Notons $\sigma^2 := \mathbf{Var}[X_i]$ pour $i = 1 \dots n$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[\hat{\mu}] &= \mathbf{E}[\hat{\mu}^2] - \mathbf{E}[\hat{\mu}]^2 \\
&= \mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] - \mu^2 \\
&= \mathbf{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right] - \mu^2.
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbf{Var}[\hat{\mu}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[X_i X_j] - \mu^2.$$

Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes et on obtient $\mathbf{E}[X_i X_j] = \mathbf{E}[X_i]\mathbf{E}[X_j] = \mu^2$. Pour $i = j$, on a : $\mathbf{E}[X_i X_j] = \mathbf{E}[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Au final :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[\hat{\mu}] &= \frac{1}{n^2}\left(n(\sigma^2 + \mu^2) + n(n-1)\mu^2\right) - \mu^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

5. Exprimez l'espérance de $\hat{V}$ comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ (prouvez votre résultat)

Solution : Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\hat{V}] &= \mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \hat{\mu}^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[X_i^2] - \mathbf{E}[\hat{\mu}^2].\end{aligned}$$

Or on a vu dans la réponse à la question précédente que $\mathbf{E}[X_i^2] = \mu^2 + \sigma^2$ et que $\mathbf{E}[\hat{\mu}^2] = \mu^2 + \sigma^2/n$. Donc :

$$\mathbf{E}[\hat{V}] = \sigma^2(1 - 1/n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

6. Exprimez la variance de $\hat{V}$ comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (prouvez votre résultat)

Exercice 5 Loi de l'espérance totale. ($\star$)

Un téléphone kadok tient en moyenne $12h$ avec la batterie A, mais seulement $8h$ avec la batterie B. La batterie A se trouve dans 80% des téléphones kadok, le reste étant muni de la batterie B. Si vous achetez un téléphone kadok, combien d'heure vous attendez-vous à ce qu'il tienne ?

3 Loi gaussienne multivariée et autres distributions

Exercice 6 Gaussienne multivariée. ($\star\star$)

1. Montrez que la densité d'un gaussienne multivariée est maximale en $x = \mu$.
2. Exprimez la vitesse de décroissance d'une gaussienne multivariée en $x = \mu$ le long d'un vecteur u de norme 1 en fonction des éléments propres de la matrice de covariance de la distribution.