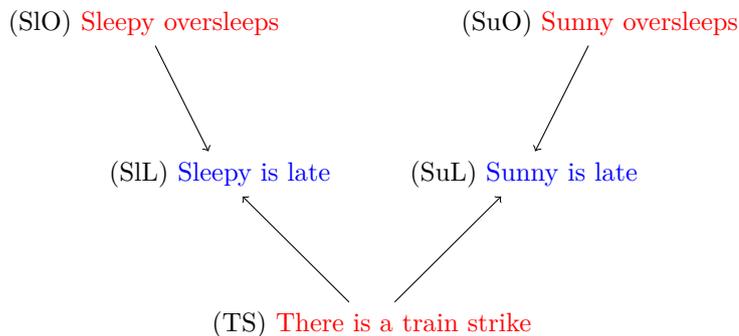


1 Notions de base

Exercice 1 Propriétés élémentaires. (★)

1. Prouvez que si A et B sont des événements indépendants, $P(A|B) = P(A)$.
2. On considère une fonction f de \mathbf{R} vers \mathbf{R} . Quelles conditions doit-elle vérifier pour être une fonction de répartition valide ? Une densité de probabilité valide ?
3. Représentez graphiquement la fonction de masse, la densité de probabilité et la fonction de répartition pour une variable aléatoire X uniforme sur $[0, 1]$.
4. Même question pour X valant 1 avec probabilité .5, 2 avec probabilité .3 et 4 avec probabilité .2.
5. Un coffre A contient 100 pièces d'or. Un coffre B contient 60 pièces d'or et 40 pièces d'argent. Vous choisissez un coffre aléatoirement selon une loi uniforme et tirez une pièce aléatoirement selon une loi uniforme dans ce coffre. Si la pièce est en or, quelle est la probabilité que vous ayez choisi le coffre A ?

Exercice 2 Calcul probabiliste. (★★)



Considérons le modèle graphique représenté ci-dessus. SIO, SuO, SIL, SuL and TS sont des variables aléatoire binaires prenant leurs valeurs dans $\{0, 1\}$. Dans cet exercice nous allons essayer de déterminer ce qui peut être inféré sur les variables latentes (en rouge) à partir de l'observation des variables observées (en bleu).

Nous faisons l'hypothèse que si au moins un des deux évènements "Sleepy oversleeps" et "There is a train strike" a lieu, alors 'Sleepy is late' a lieu également (avec probabilité 1). De façon similaire, si au moins un des deux évènements 'Sunny oversleeps' et 'There is a train strike' a lieu, alors 'Sunny is late' a lieu également (avec probabilité 1). Nous pouvons l'écrire plus formellement, de la manière suivante :

$$P(SlL = 1 | SlO = a, TS = b) = a \vee b,$$

et :

$$P(SuL = 1 | SuO = a, TS = b) = a \vee b,$$

pour tout a, b dans $\{0, 1\}$. Le symbole \vee représente le connecteur logique *ou* (inclusif) de $\{0, 1\}$ vers $\{0, 1\}$.

On note $l = P(SlO = 1)$, $u = P(SuO = 1)$ et $t = P(TS = 1)$.

1. Donner la factorisation de $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$ d'après le modèle graphique représenté ci-dessus.
2. La distribution de probabilité $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$ est-elle entièrement déterminée si les valeurs de l, u et t sont données ?
3. Calculer $P(TS = 1 | SlL = 1)$ en fonction de l, u et t .
4. Calculer $P(SlO = 1 | SlL = 1)$ en fonction de l, u et t .
5. Calculer $P(TS = 1 | SlL = 1, SuL = 1)$ en fonction de l, u et t .
6. Calculer $P(SlO = 1 | SlL = 1, SuL = 1)$ en fonction de l, u et t .
7. Supposer à présent que $l = 0.5$, $t = 0.1$ et que l'évènement 'Sleepy is late' a lieu. Quel évènement est alors le plus probable : 'There is a train strike' ou 'Sleepy overslept' ?
8. Même question si on suppose en plus que $u = 0.01$ et que l'évènement 'Sunny is late' est également observé.
9. Que se passe-t-il si on prend $l = 0.5$, $t = 0.1$ et $u = 0.2$?

2 Calculs de moment

Exercice 3 Preuve de propriétés vues en cours. (★★)

1. Montrez que $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$
2. Prouvez la loi de l'espérance totale.

3. Prouvez la loi de la variance totale.

Exercice 4 Espérance et variance d'estimateurs classiques. (★★)

Soit n un entier naturel et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Par souci de simplicité, on suppose que tous les moments des ces variables aléatoires existent. On note

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

et

$$\hat{V} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$$

1. Montrez que

$$\hat{V} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \hat{\mu}^2$$

2. Exprimez l'espérance de $\hat{\mu}$ comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables X_1, X_2, \dots, X_n (prouvez votre résultat)

On suppose à présent que X_1, X_2, \dots, X_n suivent toute la même distribution (elles sont donc i.i.d. puisqu'on a déjà supposé qu'elles étaient indépendantes).

3. Répondez à nouveau à la question précédente dans ce cadre plus simple.

4. Exprimez la variance de $\hat{\mu}$ comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables X_1, X_2, \dots, X_n (prouvez votre résultat)

5. Exprimez l'espérance de \hat{V} comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables X_1, X_2, \dots, X_n (prouvez votre résultat)

6. Exprimez la variance de \hat{V} comme une fonction de l'espérance et des moments centrés des variables X_1, X_2, \dots, X_n (prouvez votre résultat)

Exercice 5 Loi de l'espérance totale. (★)

Un téléphone kadok tient en moyenne $12h$ avec la batterie A , mais seulement $8h$ avec la batterie B . La batterie A se trouve dans 80% des téléphones kadok, le reste étant muni de la batterie B . Si vous achetez un téléphone kadok, combien d'heure vous attendez-vous à ce qu'il tienne ?

3 Loi gaussienne multivariée et autres distributions

Exercice 6 Gaussienne multivariée. (★★)

1. Montrez que la densité d'une gaussienne multivariée est maximale en $x = \mu$.
2. Exprimez la vitesse de décroissance d'une gaussienne multivariée en $x = \mu$ le long d'un vecteur u de norme 1 en fonction des éléments propres de la matrice de covariance de la distribution.