Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 3

Année 2023-24

Optimisation.

1 Optimisation sans contraintes

Exercice 1 Calcul différentiel. ($\star$)

1. Calculez les dérivées partielles par rapport à x et à y de la fonction $f : x, y \mapsto x^2 y$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.
2. Utilisez la règle donnant le Jacobien d'une fonction composée pour calculer le gradient de la fonction $x \mapsto \|x\|_2$ de de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$.
3. Calculez la Hessienne de la fonction $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.
4. Soit M une matrice à coefficients réels de taille n par n. Calculez la Hessienne de la fonction $g_M : x \mapsto x^T M x$ de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$.

Exercice 2 Existence et unicité des extrema. ($\star$)

1. Considerons $f : x \mapsto \sin(x)$ de $[0, \pi]$ vers $\mathbf{R}$. On admet que comme f est définie sur un intervalle fermé borné et continue sur cet intervalle, elle admet un minimum global (cf. théorème de Weierstrass en analyse réelle `https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_valeurs_extr%C3%AAmes`). Trouver le minimum global de f en utilisant une condition nécessaire d'existence de minimum global.
2. Montrez que la fonction $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ admet un unique minimum global et identifiez ce minimum.
3. Prouvez que la fonction $f : x_1, x_2 \mapsto x_1^2 - 36x_1 - 36x_2 + x_2^2 + 150$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ admet un minimum global.

Exercice 3 Déterminez si $f : x, y \mapsto xy + x^2 + 1 + 2y$ est convexe.

Exercice 4 Moindres carrés linéaires, cas simple. ($\star\star$)

Etant donné A une matrice à coefficients réels de taille m par n et y une matrice colonne de taille m, on cherche à déterminer si $l : x \mapsto \|Ax - y\|_2$ possède une minimum global et à identifier le ou les $x \in \mathbf{R}^n$ où cet éventuel minimum global est atteint.

1. Montre qu'on peut répondre à notre question en étudiants $f : x \mapsto (Ax - y)^T(Ax - y)$.
2. Justifier que f est de classe C^1 et calculer le gradient de f.
3. En déduire une condition nécessaire d'optimum local pour f.
4. Calculez la Hessienne de f.
5. En déduire que f admet (au moins) un minimum global.
6. Donnez une condition nécessaire d'optimum global pour f.
7. On suppose que A^TA est inversible. Prouvez que l admet un unique minimum global et donnez une expression explicite pour ce minimum global.

Exercice 5 Preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

1. Prouver que toute matrice semi-orthogonale de taille n par r, avec $r \leq n$, peut être complétée en une matrice orthogonale de taille n par n.
2. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Montrer qu'il est possible de trouver une matrice colonne x de taille n et une matrice colonne y de taille m, telles que : $Ax = \sigma y$, $\|x\|_2 = 1$, $\|y\|_2 = 1$ et $\sigma = \|A\|_2$. Indice : utiliser l'une des deux définitions équivalentes de $\|A\|_2$.
3. En utilisant le résultat de la première question, x et y, montrer qu'il existe une matrice orthogonale U de taille m par m, une matrice orthogonale V de taille n par n, une matrice colonne w de taille $n-1$ et une matrice B de taille $m-1$ par $n-1$, telles que :
$$A_1 := U^TAV = \begin{pmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$
4. Montrer que $\|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + w^Tw$. Indice : multiplier A_1 par $(\sigma\ w^T)^T$.
5. Montrer que $\|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2$ et en déduire la valeur de w.
6. Utiliser un raisonnement par récurrence pour compléter la preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières.

2 Optimisation sous contraintes

Point de cours. Conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour des fonctions $\mathcal{C}^1$.

Soit f, $(e_i)_{i=1}^{n_E}$ et $(c_i)_{i=1}^{n_I}$ des fonctions de $\mathbf{R}^d$ vers $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme nous l'avons vu en cours, on dit que le point $x^* \in \mathbf{R}^d$ vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour le problème :

$$\min_{x \in \mathbf{R}^d} f(x) \text{ tel que } \begin{cases} e_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \geq 0, & i \in \mathcal{I} \end{cases}$$

si et seulement si il existe $\lambda_E^* \in \mathbf{R}^{n_E}$ et $\lambda_I^* \in \mathbf{R}^{n_I}$, tels que :

1. $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda_E^*, \lambda_I^*) = 0$, où $\mathcal{L}(x, \lambda_E, \lambda_I) = f(x) - \sum_{i=1}^{n_E} \lambda_{E,i} e_i(x) - \sum_{i=1}^{n_I} \lambda_{I,i} c_i(x)$
2. $e_i(x^*) = 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_E\}$
3. $c_i(x^*) \geq 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_I\}$
4. $\lambda_{I,i} \geq 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_I\}$
5. $\lambda_{I,i} c_i(x^*) = 0$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n_I\}$

Les trois théorèmes suivants donnent des conditions de régularité sur les fonctions du problème—appelées *qualifications des contraintes*—qui garantissent que toute solution locale du problème considéré doit vérifier les conditions KKT (c'est à dire que sous ces conditions de régularité les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale). Notez qu'on peut démontrer la validité d'autres qualification des contraintes que les trois présentées ici et qu'il est possible de généraliser ces théorèmes au delà du cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Theorem 1 *Conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéaires. Si les fonctions e_i et c_j sont affines pour $i = 1 \ldots n_E$ et $j = 1 \ldots n_I$ alors les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale pour le problème considéré.*

Theorem 2 *Conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendantes.*

Si au point $x \in \mathbf{R}^d$ la matrice formée par les gradients des contraintes d'égalité et des contraintes d'inégalité ***actives*** *est de rang plein (c'est à dire que les n_E vecteurs gradients pour les contraintes d'égalité—qui doivent toujours toutes être actives—et les vecteurs gradients pour les contraintes d'inégalité actives en x—c'est à dire telles que $c_i(x) = 0$—sont linéairement indépendants), alors les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale en x pour le problème considéré.*

Theorem 3 *Conditions nécessaires de solution locale pour un problème convexe.*

Si f est convexe, c_i est concave pour tout i in $1 \dots n_I$ et e_j est affine pour tout j in $1 \dots n_E$ et si la condition de Slater est vérifiée, c'est à dire s'il existe $x \in \mathbf{R}^d$ tel que $e_j(x) = 0$ pour tout j in $1 \dots n_E$ et $c_i(x) > 0$ pour tout i in $1 \dots n_I$, alors les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale pour le problème considéré.

Exercice 6 Application des conditions KKT. ($\star$)

On considère le problème

$$\min_{x,y \in \mathbf{R}^2} x^2 + y^2 \text{ tel que } \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \leq 2 \\ y^2 \geq x \end{cases}$$

1. Donnez les conditions KKT pour ce problème.

Solution : On peut prendre : $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$, $c_1 : x, y \mapsto x + y - 1$, $c_2 : x, y \mapsto 2 - y$, $c_3 : x, y \mapsto y^2 - x$. On a $\mathcal{L} : x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mapsto x^2 + y^2 + \lambda_1(1 - x - y) + \lambda_2(y - 2) + \lambda_3(x - y^2)$ et les conditions KKT sont donc :

(a) $2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$ et $2y(1 - \lambda_3) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

(b) $y^2 \geq x$, $y \leq 2$ et $x + y \geq 1$

(c) $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_3 \geq 0$

(d) $\lambda_1(1 - x - y) = 0$, $\lambda_2(y - 2) = 0$ et $\lambda_3(x - y^2) = 0$

2. Trouvez tous les points solutions des conditions de KKT pour ce problème.

Solution : On raisonne par disjonction des cas selon les contraintes saturées.

(a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Alors la nullité du gradient du Lagrangien nous donne que $(x, y) = (0, 0)$, mais alors $x + y = 0 < 1$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 \neq 0$. Alors, $x = -\lambda_3/2$, $y^2 = x$ et $y = 0$ ou $\lambda_3 = 1$. Si $y = 0$, alors $x = 0$, ce qui ne donne pas une solution comme on l'a déjà vu. Si $\lambda_3 = 1$, alors $x = -1/2$. Mais $y^2 = -1/2$ ne possède pas de solution pour $y \in \mathbf{R}$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

Solution : (Continuée)

(a) Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Alors $x = 0$, $y = -\lambda_2/2$ et $y = 2$. Cela contredit la condition $\lambda_2 \geq 0$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(b) Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$. Alors $x = y = \lambda_1/2$ et $x + y = 1$. Donc $x = y = 1/2$ et $\lambda_1 = 1$. Cela contredit la contrainte $y^2 \geq x$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(c) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Alors $\lambda_3 = -2x$, $\lambda_2 = 2y(\lambda_3 - 1)$, $y = 2$ et $x = y^2 = 4$. Donc $\lambda_3 = -8$ et $\lambda_2 = -36$. Cela contredit les conditions $\lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_3 \geq 0$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(d) Si $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Alors $\lambda_3 = \lambda_1 - 2x$, $\lambda_1 = 2y\frac{1+2x}{1+2y}$, $x + y = 1$ et $x = y^2$. Donc $y^2 + y - 1 = 0$. D'où $y = -1/2 + \sqrt{5}/2$ ou $y = -1/2 - \sqrt{5}/2$.
   - Si $y = -1/2 + \sqrt{5}/2$, alors $x = 3/2 - \sqrt{5}/2$, $\lambda_1 = \frac{25-9\sqrt{5}}{5} \approx 0.975$ et $\lambda_3 = \frac{10-4\sqrt{5}}{5} \approx 0.211$. On obtient après vérification que les conditions KKT sont vérifiées ssi :
   $$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{25-9\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{10-4\sqrt{5}}{5} \right).$$
   - Si $y = -1/2 - \sqrt{5}/2$, alors $x = 3/2 + \sqrt{5}/2$, $\lambda_1 = \frac{25+9\sqrt{5}}{5}$ et $\lambda_3 = \frac{10+4\sqrt{5}}{5}$. On obtient après vérification que les conditions KKT sont vérifiées ssi :
   $$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{25+9\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{10+4\sqrt{5}}{5} \right).$$

(e) Si $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Alors $\lambda_1 = 2x$, $\lambda_2 = \lambda_1 - 2y$, $x + y = 1$ et $y = 2$. Donc $x = -1$, $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -6$. Cela contredit les conditions $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

(f) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_3 \neq 0$. Alors, $x + y = 1$, $y = 2$ et $y = x^2$. Ce système d'équations ne possède pas de solution. Il n'y a donc pas de point solution des conditions KKT dans ce cas.

Au final, il n'y a que deux points $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de $\mathbf{R}^5$ satisfiant les conditions KKT (donnés ci-dessus).

3. Donnez en le justifiant toutes les solutions globales de ce problème.

Solution : Cherchons des conditions nécessaires pour que $x \in \mathbf{R}^2$ soit une solution globale. Si x est une solution globale, alors x est une solution locale. On raisonne par disjonction des cas sur les contraintes actives (comme dans la question précédente) pour appliquer les conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendendantes données dans l'énoncé. On a $\nabla c_1 : x, y \mapsto (1,1)$, $\nabla c_2 : x, y \mapsto (0,-1)$ et $\nabla c_3 : x, y \mapsto (-1, 2y)$.

(a) Si en (x, y), aucune contrainte n'est active ou une seule contrainte est active ou seulement deux contraintes sont actives, en excluant le cas où c_1 et c_3 sont actives, alors la matrice des gradients des contraintes actives est de rang plein et les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale.

(b) Si en (x, y), seules c_1 et c_3 sont actives, alors la matrice des gradients des contraintes actives est de rang plein sauf si $y = -1/2$. Mais si $y = -1/2$ et c_1 et c_3 sont actives, alors $x = 3/2$ et $y^2 = 1/4 = x$, ce qui est une contradiction. Si c_1 et c_3 sont actives, les conditions KKT sont donc des conditions nécessaires de solution locale.

(c) On a déjà vu dans la question précédente qu'on ne peut pas avoir c_1, c_2 et c_3 actives simultanément en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a donc traité tous les cas possibles.

On en conclut que les conditions KKT sont des conditions nécessaires de solution locale pour le problème considéré et donc que les seules solutions globales possibles sont :

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \text{ et } (x_2, y_2) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right).$$

En calculant la valeur de f en (x_1, y_1) et (x_2, y_2) on voit que $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$. Donc la seule solution globale possible est (x_1, y_1).

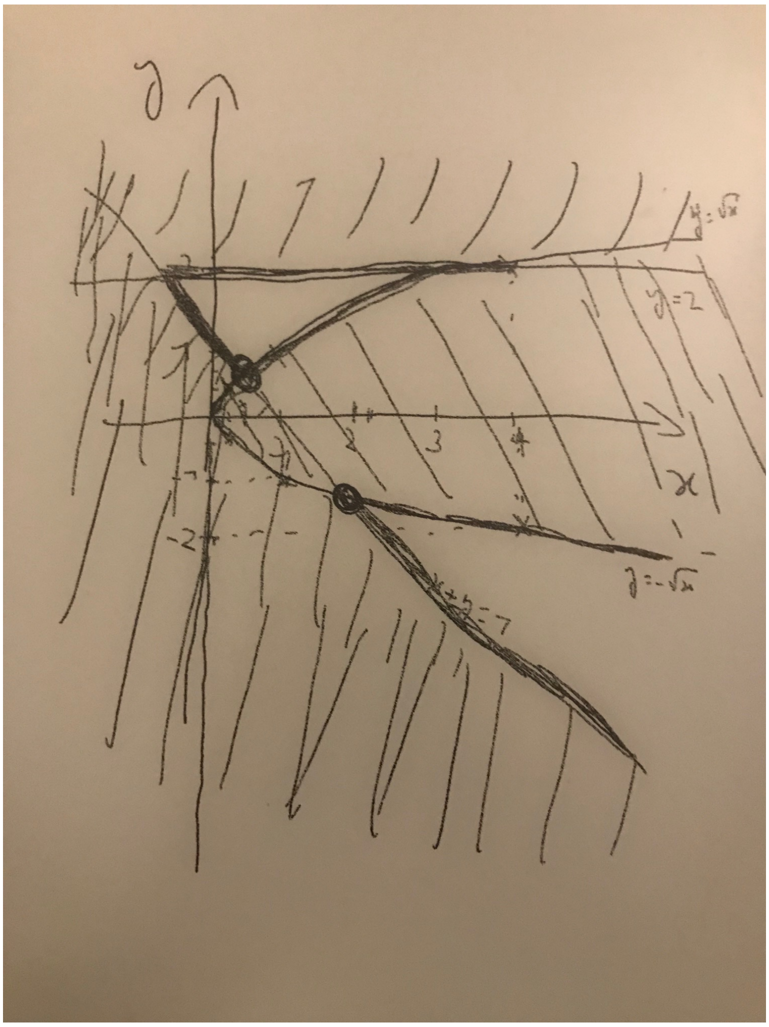
Il reste à déterminer si le problème admet au moins une solution globale. L'ensemble des Ω des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant les contraintes d'inégalité c_1, c_2, c_3 est un fermé de $\mathbf{R}^2$ (cf. question suivante pour une visualisation de Ω) et f est continue et coercive sur $\mathbf{R}^2$. On en déduit que f admet (au moins) un minimum global sur Ω.

Cela nous permet de conclure que le problème possède une unique solution globale en :

$$x^* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \ y^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

4. Faites un graphe pour vérifier la plausibilité de vos réponses.

Solution :



Exercice 7 Boîte de surface maximale à diagonale fixée. ($\star$)

Trouvez le parallélépipède rectangle (pavé droit) dont la surface (somme des aires des six faces) est maximale parmi tous les parallélépides rectangles de diagonale $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L$, où L est un nombre réel strictement positif fixé et x_1, x_2, x_3 sont les longueurs des côtés du parallélépipède rectangle.

Solution : Une modèle raisonnable pour la situation décrite est le problème de maximiser $f(x_1, x_2, x_3) := 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ sur $\mathbf{R}^3$ sous la contrainte que $e(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - L$ soit égal à 0 et que $c_1(x_1, x_2, x_3) := x_1$, $c_2(x_1, x_2, x_3) := x_2$ and $c_3(x_1, x_2, x_3) := x_3$ soient positive.

Solution : (Continuée)

Il s'agit d'un problème de maximisation d'une fonction continue sur un ensemble compact (fermé, borné) de $\mathbf{R}^3$, qui admet donc (au moins) une solution globale.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. x vérifie les conditions KKT si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que :

1. $\nabla_x(2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - L) - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3) = 0$, c'est à dire :
   (a) $2(x_2 + x_3 - \lambda x_1) - \lambda_1 = 0$
   (b) $2(x_1 + x_3 - \lambda x_2) - \lambda_2 = 0$
   (c) $2(x_1 + x_2 - \lambda x_3) - \lambda_3 = 0$
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L$
3. $x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$
4. $\lambda_1 \geq 0, \; \lambda_2 \geq 0, \; \lambda_3 \geq 0$
5. $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3 = 0$

Les gradients des contraintes sont : $\nabla e(x) = 2x$, $\nabla c_1(x) = (1, 0, 0)$, $\nabla c_2(x) = (0, 1, 0)$, $\nabla c_3(x) = (0, 0, 1)$. Si $x = (0, 0, 0)$ e ne peut pas être satisfaite car $L > 0$. Si $x \neq (0, 0, 0)$, les trois contraintes d'inégalités ne sont pas actives en même temps et on vérifie immédiatement que les gradients des contraintes actives sont linéairement indépendants. On en déduit, en utilisant le théorème donnant les conditions nécessaires de solution locale pour des contraintes linéairement indépendantes, que les solutions globales du problème sont nécessairement atteintes en des points satisfiant les conditions KKT.

On raisonne par disjonction des cas pour trouver tous les points vérifiant les conditions KKT.

1. On a déjà vu que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ne convient pas.
2. Supposons $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 > 0$. Alors $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, \sqrt{L}, 0, 2\sqrt{L}, 2\sqrt{L}, 0)$ est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est 0. Le problème étant symmétrique par permutation de (x_1, x_2, x_3), les points KKT pour le cas $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 > 0$ et pour le cas $x_2 = x_3 = 0$ et $x_1 > 0$ s'obtiennent en prenant le symmétrique approprié de la solution obtenue ci-dessus.

Solution : (Continuée)

1. Supposons $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$, $x_3 > 0$. Alors $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \sqrt{L/2}, \sqrt{L/2}, -1, 2\sqrt{2L}, 0, 0)$ est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est L. Le problème étant symmétrique par permutation de (x_1, x_2, x_3), les points KKT pour le cas $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$, $x_3 > 0$ et pour le cas $x_3 = 0$ et $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ s'obtiennent en prenant le symmétrique approprié de la solution obtenue ci-dessus.
2. Supposons $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et $x_3 > 0$. Alors $(x_1, x_2, x_3, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\sqrt{L/3}, \sqrt{L/3}, \sqrt{L/3}, 2, 0, 0, 0)$ est la seule solution des conditions de KKT et l'aire correspondante est $2L$.

Il y a donc une unique solution globale au problème considéré, données par un cube de côté $\sqrt{L/3}$ et de surface $2L$.

3 Analyse convexe et dualité

Exercice 8 Problème dual. ($\star$)

On considère $f : x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ définie sur $\mathbf{R}^n$.

On cherche à maximiser f sous les contraintes : $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$ et pour tout i, $x_i \geq 0$.

1. Donner la définition de la fonction duale et du problème dual associés à ce problème.
2. Calculer la fonction duale.
3. Résoudre le problème dual.
4. En déduire (en justifiant) la solution du problème initial (problème primal).

Exercice 9 Écart dual pour le problème du sac à dos. ($\star\star$)

On considère n objets avec des poids associés $w_1, w_2, \ldots, w_n$, et des valeurs associées $v_1, v_2, \ldots, v_n$. On veut sélectionner un sous-ensemble de ces objets tel que la somme des poids associés aux éléments de ce sous-ensemble ne dépasse pas un réel $A > 0$ donné et tel que la somme des valeurs associées aux éléments de ce sous-ensemble soit maximisée.

1. Montrer que le problème peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned}
&\text{minimiser } f(x) = -\sum_{i=1}^{n} v_i x_i && \text{(Problème du sac à dos)}\\
&\text{avec } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq A \\
&\text{et pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_i \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

2. Trouver graphiquement la solution du problème dual et représenter graphiquement l'écart de dualité pour $n = 5$, $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$ et $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (3, 1, 6, 2, 5)$.
3. Calculer explicitement la fonction duale dans le cas général.
4. Trouver la solution du problème dual. (Indice : on peut faire l'hypothèse, sans perte de généralité, que $\frac{v_1}{w_1} \leq \frac{v_2}{w_2} \leq \cdots \leq \frac{v_n}{w_n}$ et étudier la valeur de la fonction duale en fonction de la position de son argument par rapport aux v_i/w_i.)
5. On considère maintenant le problème relaxé :

$$\begin{aligned}
&\text{minimiser } f(x) = -\sum_{i=1}^{n} v_i x_i && \text{(Problème du sac à dos relaxé)}\\
&\text{avec } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq A \\
&\text{et pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_i \in [0, 1].
\end{aligned}$$

   Justifier qu'il n'y a pas d'écart de dualité pour ce problème.
6. Montrer que le problème dual du problème relaxé atteint le même maximum que le problème dual du problème original.
7. Utiliser les conditions d'optimalité primale-duale vues en cours pour obtenir la solution du problème primal relaxé.
8. Montrer que cette solution est faisable pour le problème primal original et en déduire que :

$$q^* \leq f^* \leq q^* + \max_{1 \leq i \leq n} v_i,$$

   où f^* est la solution du problème primal original et q^* est la solution du problème dual original.