Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 2

Année 2023-24

Algèbre linéaire et optimisation.

1 Algèbre linéaire : orthogonalité

Exercice 1 Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$. ($\star$)

Prouvez que la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x, y \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 2 Matrices orthogonales. ($\star$)

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ les coordonnées de n vecteurs de dimensions d dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$.

1. On suppose que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, calculez les produits matriciels $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n][v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]^T$ et $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]^T[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$, où on a considéré les v_i comme des matrices colonnes.
2. Même question, si on suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux.
3. On suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux et que $n = d$. Montrez que la matrice $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$ est inversible et donnez son inverse.

Exercice 3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et décomposition QR. ($\star$)

On considère le vecteur de v_1 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(3, 1)$ et le vecteur v_2 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(2, 2)$.

1. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (v_1, v_2).
2. En déduire une décomposition de la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

comme un produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 4 Validité du processus de Gram-Schmidt. ($\star\star$)

Etant donnés un espace vectoriel E et un produit scalaire $(.|.)$ quelconques (possiblement en dimension infinie), prouvez par récurrence que la famille de vecteurs produite par le processus de Gram-Schmidt est orthonormale.

Exercice 5 Polynômes orthogonaux. ($\star\star\star$)

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif d et des nombres réels a_0, a_1, ..., a_d, tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.

Solution : Nous définissons une opération d'addition

$$+ : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R}[X] \\ P, Q & \mapsto & P + Q \end{array} \right.$$

sur $\mathbf{R}$[X] en prenant pour tout $P = \sum_{i=1}^{d_1} a_i$ et $Q = \sum_{i=1}^{d_2} b_i$:

$$P + Q := \sum_{i=0}^{\max(d1,d2)} (\tilde{a}_i + \tilde{b}_i) X^i,$$

où $\tilde{a}_i = a_i$ si $i \leq d_1$ et 0 sinon et $\tilde{b}_i = b_i$ si $i \leq d_2$ et 0 sinon.

Pour la multiplication par un scalaire :

$$. : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R} \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R}[X] \\ \alpha, P & \mapsto & \alpha P \end{array} \right.$$

sur $\mathbf{R}$[X] nous prenons pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et $P = \sum_{i=1}^{d_1} a_i$:

$$\alpha P := \sum_{i=0}^{d} (\alpha a_i) X^i.$$

Les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication sur $\mathbf{R}$ permettent de vérifier l'associativité, la commutativité, l'existence d'un élément neutre et d'inverses pour $+$ sur $\mathbf{R}[X]$, ainsi que la compatibilité de . avec la multiplication sur $\mathbf{R}$, la présence d'un élement neutre pour . et la distributivité de . par rapport à l'addition sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{R}[X]$.

On en conclut que $(\mathbf{R}[X], +, .)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que :

$$(. \mid .) : \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x) Q(x) dx \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Solution : Un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel est une forme bilinéaire symmétrique définie positive.

Avant tout, remarquons que les fonctions polynômiales d'une variable réelle sont continues sur $[0,1]$ intervalle compact de $\mathbf{R}$, il n'y donc pas de problèmes de définition de l'intégrale ci-dessus.

En appliquant notre définition d'addition sur $\mathbf{R}[X]$ et la linéarité de l'intégration, on obtient que $(. \mid .)$ est une forme bilinéaire. Elle est symmétrique par commutativité de la multiplication sur $\mathbf{R}$. Elle est positive car pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $(P \mid P) = \int_0^1 P^2(x)dx$ et l'intégrale d'une fonction positive est toujours positive. Elle est définie car : 1) les fonctions polynomiales sont continues sur $]0,1[$, intervalle ouvert non vide, 2) l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle ouvert non vide ne peut être égale à zéro que si la fonction est égale à zéro sur cet intervalle 3) la fonction polynomiale associé à un polynôme ne peut être égale à zéro sur un intervalle ouvert non vide que si tous les coefficients du polynôme sont égaux à zéro.

3. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(. \mid .)$ et telle que pour tout entier positif n, le degré de P_n est n et le coefficient d'ordre n de P_n est strictement positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.

Solution :

La décomposition canonique des polynômes comme combinaison linéaire de $(1, X, X^2, \dots)$ établit que $\mathcal{B} := (X^i)_{i=0}^{+\infty}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base en définissant par récurrence :

$$P_0 = 1,$$

$$\tilde{P}_n = X^n - \sum_{j=0}^{n-1} (X^n \mid P_j) P_j,$$

et enfin :

$$P_n = \frac{\tilde{P}_n}{\sqrt{(\tilde{P}_n \mid \tilde{P}_n)}},$$

pour tout entier strictement positif n.

Solution : (continuée)

La preuve par récurrence que la famille $\mathcal{P} := (P_i)_{i=0}^{+\infty}$ résultante est est une base orthonormale de $\mathbf{R}[X]$ est identique au cas vu en cours. Une récurrence immédiate établit que pour tout entier positif n, $\tilde{P}_n$ et P_n sont de degré n, que le coefficient dominant de $\tilde{P}_n$ est 1 et que le coefficient dominant de P est $\frac{1}{\sqrt{(\tilde{P}_n|\tilde{P}_n)}} > 0$.

Il reste à prouver l'unicité d'une base possédant ces propriétés. Supposons qu'on ait trouvé une base $\mathcal{Q} := (Q_i)_{i=0}^{+\infty}$ avec les mêmes propriétés qui soit différente de $\mathcal{P}$. Notons k le plus petit indice tel que $P_k \neq Q_k$. Par hypothèse, le degré de Q_k est k, on peut donc écrire $Q_k = \sum_{i=0}^{k}(Q_k \mid P_i)P_i$. Pour tout entier i, $0 \leq i < k$, on a que $Q_i = P_i$ et donc $(Q_k \mid P_i) = (Q_k \mid Q_i) = 0$ par orthonormalité de $\mathcal{Q}$. Donc $Q_k = (Q_k \mid P_k)P_k$. On en déduit que $\|Q_k\| = |(Q_k \mid P_k)|^2\|P_k\|$. Comme $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont orthonormale, on a $\|Q_k\| = \|P_k\| = 1$. ON en déduit que $|(Q_k \mid P_k)|^2 = 1$ et donc que $(Q_k \mid P_k)$ est égal à -1 ou 1. Or $(Q_k \mid P_k)$ est le coefficient dominant de Q_k et est donc par hypothèse positif. On en conclut que $(Q_k \mid P_k) = 1$ et donc que $Q_k = P_k$, ce qui contredit notre hypothèse que $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$.

4. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$?

Solution : Les bases de $\mathbf{R}[X]$ que nous avons trouvé contiennent un nombre d'élément infini (plus précisémment, un infini dénombrable). $\mathbf{R}[X]$ est donc un espace vectoriel de dimension infinie (plus précisémment de dimension égale au cardinal de $\mathbf{N}$).

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (a_nX + b_n)P_{n-1}(X) + c_nP_{n-2}(X),$$

pour des suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (c_n) qu'on explicitera.

Solution : Un élément central de la preuve est la propriété suivante : pour tous polynômes P et Q :

$$(XP \mid Q) = \int_0^1 xP(x)Q(x)dx = \int_0^1 P(x)xQ(x)dx = (P \mid XQ).$$

Solution : (continuée)

Cette propriété permet notamment d'établir que tout polynôme R de la forme :

$$R = (aX + b)P_{n-1} + cP_{n-2},$$

où a, b et c sont des réels, est orthogonal à P_0, à P_1, ..., et à P_{n-3}. En effet, prenons un entier k dans $\{0, 1, \dots, n-3\}$. On a :

$$(R \mid P_k) = a(XP_{n-1} \mid P_k) + b(P_{n-1} \mid P_k) + c(P_{n-2} \mid P_k) = a(P_{n-1} \mid XP_k) + 0 + 0.$$

Comme le degré de P_k est $k < n-2$, le degré de XP_k est strictement inférieur à $n-1$ et donc $XP_k \in \mathrm{Vect}\{P_0, P_1, \dots, P_{n-2}\}$. Par orthonormalité de $\mathcal{P}$, on en déduit que XP_k est orthonormal à P_{n-1} et donc que $(R \mid P_k) = 0$.

Une conséquence de ce résultat est que si pour tout $n \geq 2$ on pouvait trouver des réels a_n, b_n et c_n tels que la projection de $R_n = a_nXP_{n-1} + b_nP_{n-1} + c_nP_{n-2}$ sur, respectivement, P_n, P_{n-1} et P_{n-2} soit, respectivement, 1, 0 et 0, alors on aurait forcément pour tout $n \geq 2$, $R_n = P_n$ (en utilisant le résultat d'unicité de la question 3), ce qui résoudrait la question.

Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'on peut trouver de tels réels a_n, b_n et c_n pour tout $n \geq 2$. Soit $n \geq 2$, on a :

$$(R_n \mid P_n) = a_n(XP_{n-1} \mid P_n) + 0 + 0.$$

Calculons plus explicitement $(XP_{n-1} \mid P_n)$ pour vérifier qu'il est non-nul, ce qui nous permettra de garantir $(R_n \mid P_n) = 1$ en prenant $a_n := \frac{1}{(XP_{n-1} \mid P_n)}$.

Le degré de XP_{n-1} est n, on peut donc l'écrire :

$$XP_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} (XP_{n-1} \mid P_i)P_i.$$

Les coefficients dominants des polynômes à gauche et à droite du signe d'égalité sont respectivement λ_{n-1} et $\lambda_n(XP_{n-1} \mid P_n)$, où pour tout entier k, λ_k est le coefficient dominant de P_k (donc $\lambda_k \neq 0$). On a donc : $\lambda_{n-1} = \lambda_n(XP_{n-1} \mid P_n)$ avec $\lambda_{n-1} \neq 0$ et $\lambda_n \neq 0$, d'où :

$$(XP_{n-1} \mid P_n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \neq 0.$$

Solution : (continuée)

En prenant :

$$a_n := \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}},$$

on a donc $(R_n \mid P_n) = 1$.

Considérons maintenant la projection sur P_{n-1} :

$$(R_n \mid P_{n-1}) = a_n(XP_{n-1} \mid P_{n-1}) + b_n.$$

En prenant :

$$b_n := -\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}(XP_{n-1} \mid P_{n-1})$$

on a donc $(R_n \mid P_{n-1}) = 0$.

Finalement, considérons la projection sur P_{n-2} :

$$(R_n \mid P_{n-2}) = a_n(XP_{n-1} \mid P_{n-2}) + c_n.$$

En prenant :

$$c_n := -\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}(XP_{n-1} \mid P_{n-2})$$

on a donc $(R_n \mid P_{n-2}) = 0$.

On peut obtenir une expression plus explicite pour c_n en remarquant que :

$$(XP_{n-1} \mid P_{n-2}) = (P_{n-1} \mid XP_{n-2}) = (XP_{n-2} \mid P_{n-1}) = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}},$$

par un raisonnement analogue au cas de $(XP_{n-1} \mid P_n)$. On obtient alors :

$$c_n = -\frac{\lambda_n \lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}^2}.$$

2 Algèbre linéaire : structure des applications linéaires

Exercice 6 Propriétés élémentaires de la décomposition en valeurs singulières. ($\star$)

Indice : dans le cadre de cet exercice, pensez aux différentes interprétations des produits matrice-matrice et matrice-vecteurs que nous avons vu en cours.

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par n. Le théorème sur la décomposition en valeurs singulières indique qu'il existe une matrice orthogonale $U = [u_1\ u_2\ \dots\ u_m]$ de taille m par m, une matrice orthogonale $V = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$ de taille n par n, un entier naturel $r \leq \min(m, n)$ et une matrice diagonale $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ de taille m par n, tels que toutes les matrices sont à coefficients réels, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ et $AV = U\Sigma$.

1. Montrez que $A = U\Sigma V^T$ et que $\Sigma = U^T AV$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \dots, r\}$, $Av_i = \sigma_i u_i$.
3. Montrez que pour tout i dans $\{r+1, r+2, \dots, n\}$, $Av_i = 0$, i.e. $v_i \in \text{Ker}A$.
4. Montrez que $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$.

Exercice 7 Dérivation des théorèmes fondamentaux de l'algèbre linéaire à partir de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

On considère le même point de départ que dans l'exercice précédent (décomposition en valeur singulière d'une matrice A).

1. Montrez que les r premières colonnes de U forment une base orthonormale de l'image de A.
2. Montrez que les $m - r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale du co-noyau de A (i.e. le noyau de A^T).
3. Montrez que les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de la co-image de A (i.e. l'image de A^T).
4. Montrez que les $n - r$ dernières colonnes de V forment une base orthonormale du noyau de A.
5. Montrez que le noyau et la co-image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire qu'on peut décomposer tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ de manière unique en une somme de deux vecteurs orthogonaux, l'un appartenant au noyau de A et l'autre appartenant à la co-image de A.
6. Montrez que le co-noyau et l'image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^m$.
7. Montrez qu'il existe un unique entier naturel $r \leq \min(m, n)$, le range de A, tel que l'image et la co-image de A sont de même dimension r.
8. Montrez que l'entier r de la question précédente est aussi la dimension de l'image de toute application linéaire $f : E \to F$ telle qu'il existe des bases B_E et B_F de E et F telles que $A = M(f, B_E, B_F)$.

9. Montrez que la matrice A est inversible—c'est à dire qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$—si et seulement si $r = m = n$ et donnez une expression pour A^{-1} en fonction de U, Σ et V.

Exercice 8 Décomposition en valeurs singulières des matrices orthogonales. ($\star$)

Déterminez les valeurs singulières d'une matrice orthogonale.

Exercice 9 Propriétés élémentaires de la décomposition spectrale. ($\star$)

Soit S une matrice à coefficients réels de taille m par m symmétrique. Le théorème spectral indique qu'il existe une matrice orthogonale réelle $Q = [q_1\ q_2\ \ldots q_m]$ de taille m par m et une matrice diagonale réelle $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ de taille m par m, telles que $S = Q\lambda Q^T$.

1. Montrez que $\Lambda = Q^T SQ$ et que $SQ = Q\Lambda$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $Sq_i = \lambda_i q_i$.
3. Montrez que $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$.
4. Proposez une interprétation intuitive du résultat du produit matrice vecteur Sv en vous appuyant sur la réponse à la question précédente.
5. On considère un polynôme P. Calculer $P(S)$ en fonction de Q et Λ.

Exercice 10 Éléments propres de A^TA et AA^T. ($\star$)

1. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de A^TA et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.

Solution : On sait qu'il existe une décomposition en valeurs singulières de A, c'est à dire qu'il existe une matrice orthogonale U de taille $m \times m$, une matrice orthogonale V de taille $n \times n$ et une matrice rectangulaire diagonale Σ de taille $m \times n$ dont les $\min(m, n)$ valeurs diagonales sont rangées en ordre décroissant et positives, telles que $A = U\Sigma V^T$. De plus, on a vu que la matrice Σ apparaissant dans une telle décomposition est unique est que les valeurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}$ apparaissant sur sa diagonale sont appelées valeurs singulières de A.

Soit donc une telle décomposition en valeurs singulières (Σ, U, V) de A. On a :

$$\begin{aligned} A^T A &= (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) \\ &= (V^T)^T \Sigma^T U^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^T (U^T U) \Sigma V^T \\ A^T A &= V \Sigma^T \Sigma V^T \end{aligned}$$

où on a utilisé l'associativité du produit matriciel, la règle donnant la transposée d'un produit matriciel en fonction des transposées des facteurs du produit et les propriétés définissant le caractère orthogonal d'une matrice.

$\Sigma^T \Sigma$ est une matrice diagonale de taille n par n dont les valeurs diagonales sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, n-m) \text{ fois}} \quad ,$$

De plus, V est une matrice orthogonale, donc inversible, avec $V^{-1} = V^T$. On a donc $A^T A = V D V^{-1}$ avec $D = \Sigma^T \Sigma$ diagonale. On en déduit que les valeurs propres de $A^T A$ sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, n-m) \text{ fois}} \quad .$$

Par un raisonnement directement analogue on obtient que $AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$ et on en déduit que les valeurs propres de AA^T sont :

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}^2, \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\max(0, m-n) \text{ fois}} \quad .$$

2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres pour chacune de ces deux matrices en fonction des matrices orthogonales U et V apparaissant dans la décomposition en valeur

singulières de A.

> **Solution :**
>
> On déduit de la diagonalisation $A^TA = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$ que les colonnes de V forment une base de vecteurs propres de A^TA. Comme V est orthogonale, cette base est orthonormale. Par une raisonnement analogue on déduit de la diagonalisation $AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)V$ que les colonnes de U forment une base orthonormale de vecteurs propres de AA^T.

Exercice 11 Positivité des matrices symmétriques et décomposition spectrale. ($\star$)

On considère une matrice symmétrique réelle S. Donnez des conditions nécessaire et suffisante sur les éléments de la décomposition spectrale de S pour que S soit semi-définie positive ? Pour que S soit définie positive ?

Exercice 12 Relation d'ordre sur les matrices. ($\star$)

La relation d'ordre sur les matrices symmétriques réelles proposée en cours, définit-elle un ordre total ? (C'est à dire, étant donnée deux matrices symmétriques réelles S_1 et S_2, a-t-on toujours soit $S_1 \preceq S_2$, soit $S_2 \preceq S_1$?)

Exercice 13 Vecteurs propres et valeurs propres. ($\star$)

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par m.

1. Montrez que si v est un vecteur propre de A tout produit de v par un scalaire est aussi un vecteur propre de A.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre de A, le conjugué $\bar{\lambda}$ de λ est aussi une valeur propre de A.

Exercice 14 Matrices non-diagonalisables. ($\star$)

Démontrez que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 15 Déterminant et trace. ($\star$)

1. Calculez le déterminant et la trace de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculez le déterminant de la matrice identité I_n de taille n par n en partant de la définitions formelle du déterminant.
3. Calculez le déterminant de la matrice $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en partant de la définitions formelle du déterminant.
4. Soit P une matrice inversible de taille $m \times m$, Q une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que $\det(P^{-1}AP) = \det(Q^T AQ) = \det(A)$ et que $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(Q^T AQ) = \mathrm{Tr}(A)$.
5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. En utilisant la décomposition de Jordan, calculez la trace et le déterminant de A en fonction de ses valeurs propres.

Exercice 16 Polynôme caractéristique. ($\star$)

1. Calculez le polynôme caractéristique de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Vérifiez que le théorème de Cayley-Hamilton est vérifié dans le cadre de cet exemple.
3. Donnez le polynôme caractéristique d'une matrice de taille 2×2 quelconque en fonction de la trace et du déterminant de la matrice.
4. Montrez que le polynôme caractéristique est invariant au changement de système de coordonnées.
5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que les racines du polynôme caractéristique de A sont les valeurs propres de A avec leur multiplicité. Commencez par considérer le cas où A est diagonale, puis le cas où A est diagonalisable, puis le cas général.

Exercice 17 Ensembles de matrices. ($\star$)

1. Montrez que l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ des matrices à coefficients réels de taille m par n muni de l'addition et du produit scalaire usuel est un espace vectoriel.
2. Montrez que la dimension de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ est mn, par exemple en proposant une base canonique.

Exercice 18 Diagonalisation. ($\star$)

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Solution :

$$\chi_A(X) := \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 3 & -1-X \end{vmatrix} = (X+1)^2 - 3 = X^2 + 2X - 2$$

2. Donner les valeurs propres de A.

Solution : Les valeurs propres de A sont $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$, les racines de son polynôme caractéristique.

3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.

Solution : On cherche $v_1 := \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ et $v_2 := \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ tels que v_1 et v_2 sont non nuls, $Av_1 = (\sqrt{3}-1)v_1$ et $Av_2 = (-\sqrt{3}-1)v_2$.

On a :

$$\begin{aligned} Av_1 = (\sqrt{3}-1)v_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} -v_{11} + v_{12} = (\sqrt{3}-1)v_{11} \\ 3v_{11} - v_{12} = (\sqrt{3}-1)v_{12} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_{12} = \sqrt{3}v_{11} \\ v_{11} \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{3}-1$ sont les élements de $S_1 = \{(a, \sqrt{3}a)^T \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Par exemple, $(1, \sqrt{3})^T$ est un vecteur propres associé à $\sqrt{3}-1$.

On a aussi :

$$\begin{aligned} Av_2 = (-\sqrt{3}-1)v_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} -v_{21} + v_{22} = (-\sqrt{3}-1)v_{21} \\ 3v_{21} - v_{22} = (-\sqrt{3}-1)v_{22} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_{22} = -\sqrt{3}v_{21} \\ v_{21} \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $-\sqrt{3}-1$ sont les élements de $S_2 = \{(a, -\sqrt{3}a)^T \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Par exemple, $(1, -\sqrt{3})^T$ est un vecteur propres associé à $\sqrt{3}-1$

4. Donner une diagonalisation de A.

Solution : A est une matrice de taille 2 par 2 possédant 2 valeurs propres distinctes $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$, elle est donc diagonalisable. De plus, $(1,\sqrt{3})^T$ et $(1,-\sqrt{3})^T$ sont respectivement des vecteurs propres associés à $\sqrt{3}-1$ et $-\sqrt{3}-1$. On en déduit que $A = PDP^{-1}$, où : $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$.
Par définition, $PP^{-1} = I$, ce qu'on peut exploiter pour trouver une expression explicite pour $P^{-1} := \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$.
On a :

$$PP^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{cases} q_{11} + q_{21} = 1 \\ \sqrt{3}q_{11} - \sqrt{3}q_{21} = 0 \\ q_{12} + q_{22} = 0 \\ \sqrt{3}q_{12} - \sqrt{3}q_{22} = 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_{11} = q_{21} = 1/2 \\ q_{12} = \sqrt{3}/6 \\ q_{22} = -\sqrt{3}/6 \end{cases}$$

D'où : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$.

5. Calculer l'inverse de A.

Solution : A est inversible car toutes ses valeurs propres sont différentes de 0 et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

6. Calculer l'exponentielle de A.

Solution :

$$\begin{aligned} e^A &= Pe^DP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\sqrt{3}-1} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{3}-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{3}-1} + e^{-\sqrt{3}-1}\right) & \frac{\sqrt{3}}{6}\left(e^{\sqrt{3}-1} - e^{-\sqrt{3}-1}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{\sqrt{3}-1} - e^{-\sqrt{3}-1}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{3}-1} + e^{-\sqrt{3}-1}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}.$$