Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Feuille d'exercices numéro 2

Année 2023-24

Algèbre linéaire et optimisation.

1 Algèbre linéaire : orthogonalité

Exercice 1 Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$. ($\star$)

Prouvez que la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x, y \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 2 Matrices orthogonales. ($\star$)

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ les coordonnées de n vecteurs de dimensions d dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$.

1. On suppose que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, calculez les produits matriciels $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n][v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]^T$ et $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]^T[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$, où on a considéré les v_i comme des matrices colonnes.
2. Même question, si on suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux.
3. On suppose à présent que les vecteurs sont deux à deux orthonormaux et que $n = d$. Montrez que la matrice $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$ est inversible et donnez son inverse.

Exercice 3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et décomposition QR. ($\star$)

On considère le vecteur de v_1 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(3, 1)$ et le vecteur v_2 de $\mathbf{R}^2$ dont la décomposition dans la base canonique est $(2, 2)$.

1. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (v_1, v_2).
2. En déduire une décomposition de la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

comme un produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 4 Validité du processus de Gram-Schmidt. ($\star\star$)

Etant donnés un espace vectoriel E et un produit scalaire $(.|.)$ quelconques (possiblement en dimension infinie), prouvez par récurrence que la famille de vecteurs produite par le processus de Gram-Schmidt est orthonormale.

Exercice 5 Polynômes orthogonaux. ($\star\star\star$)

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif d et des nombres réels a_0, a_1, …, a_d, tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.
2. Montrer que :

$$(.\mid.) : \left| \begin{array}{lll} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array} \right.$$

   définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
3. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(.\mid.)$ et telle que pour tout entier positif n, le degré de P_n est n et le coefficient d'ordre n de P_n est strictement positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.
4. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$?
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (a_n X + b_n)P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X),$$

   pour des suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (c_n) qu'on explicitera.

2 Algèbre linéaire : structure des applications linéaires

Exercice 6 Propriétés élémentaires de la décomposition en valeurs singulières. ($\star$)

Indice : dans le cadre de cet exercice, pensez aux différentes interprétations des produits matrice-matrice et matrice-vecteurs que nous avons vu en cours.

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par n. Le théorème sur la décomposition en valeurs singulières indique qu'il existe une matrice orthogonale $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$ de taille m par m, une matrice orthogonale $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ de taille n par n, un entier naturel $r \leq \min(m, n)$ et une matrice diagonale $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ de taille m par n, tels que toutes les matrices sont à coefficients réels, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ et $AV = U\Sigma$.

1. Montrez que $A = U\Sigma V^T$ et que $\Sigma = U^T AV$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \dots, r\}$, $Av_i = \sigma_i u_i$.
3. Montrez que pour tout i dans $\{r + 1, r + 2, \dots, n\}$, $Av_i = 0$, i.e. $v_i \in \mathrm{Ker} A$.
4. Montrez que $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$.

Exercice 7 Dérivation des théorèmes fondamentaux de l'algèbre linéaire à partir de la décomposition en valeurs singulières. ($\star\star$)

On considère le même point de départ que dans l'exercice précédent (décomposition en valeur singulière d'une matrice A).

1. Montrez que les r premières colonnes de U forment une base orthonormale de l'image de A.
2. Montrez que les $m - r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale du co-noyau de A (i.e. le noyau de A^T).
3. Montrez que les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de la co-image de A (i.e. l'image de A^T).
4. Montrez que les $n - r$ dernières colonnes de V forment une base orthonormale du noyau de A.
5. Montrez que le noyau et la co-image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire qu'on peut décomposer tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ de manière unique en une somme de deux vecteurs orthogonaux, l'un appartenant au noyau de A et l'autre appartenant à la co-image de A.
6. Montrez que le co-noyau et l'image de A sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $\mathbf{R}^m$.
7. Montrez qu'il existe un unique entier naturel $r \leq \min(m, n)$, le range de A, tel que l'image et la co-image de A sont de même dimension r.

8. Montrez que l'entier r de la question précédente est aussi la dimension de l'image de toute application linéaire $f : E \to F$ telle qu'il existe des bases B_E et B_F de E et F telles que $A = M(f, B_E, B_F)$.
9. Montrez que la matrice A est inversible—c'est à dire qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$—si et seulement si $r = m = n$ et donnez une expression pour A^{-1} en fonction de U, Σ et V.

Exercice 8 Décomposition en valeurs singulières des matrices orthogonales. ($\star$)

Déterminez les valeurs singulières d'une matrice orthogonale.

Exercice 9 Propriétés élémentaires de la décomposition spectrale. ($\star$)

Soit S une matrice à coefficients réels de taille m par m symmétrique. Le théorème spectral indique qu'il existe une matrice orthogonale réelle $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots q_m]$ de taille m par m et une matrice diagonale réelle $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ de taille m par m, telles que $S = Q\lambda Q^T$.

1. Montrez que $\Lambda = Q^T SQ$ et que $SQ = Q\Lambda$.
2. Montrez que pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n\}$, $Sq_i = \lambda_i q_i$.
3. Montrez que $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$.
4. Proposez une interprétation intuitive du résultat du produit matrice vecteur Sv en vous appuyant sur la réponse à la question précédente.
5. On considère un polynôme P. Calculer $P(S)$ en fonction de Q et Λ.

Exercice 10 Éléments propres de $A^T A$ et AA^T. ($\star$)

1. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.
2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres pour chacune de ces deux matrices en fonction des matrices orthogonales U et V apparaissant dans la décomposition en valeur singulières de A.

Exercice 11 Positivité des matrices symmétriques et décomposition spectrale. ($\star$)

On considère une matrice symmétrique réelle S. Donnez des conditions nécessaire et suffisante sur les éléments de la décomposition spectrale de S pour que S soit semi-définie positive ? Pour que S soit définie positive ?

Exercice 12 Relation d'ordre sur les matrices. ($\star$)

La relation d'ordre sur les matrices symmétriques réelles proposée en cours, définit-elle un ordre total ? (C'est à dire, étant donnée deux matrices symmétriques réelles S_1 et S_2, a-t-on toujours soit $S_1 \preceq S_2$, soit $S_2 \preceq S_1$?)

Exercice 13 Vecteurs propres et valeurs propres. ($\star$)

Soit A une matrice à coefficients réels de taille m par m.

1. Montrez que si v est un vecteur propre de A tout produit de v par un scalaire est aussi un vecteur propre de A.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre de A, le conjugué $\bar{\lambda}$ de λ est aussi une valeur propre de A.

Exercice 14 Matrices non-diagonalisables. ($\star$)

Démontrez que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 15 Déterminant et trace. ($\star$)

1. Calculez le déterminant et la trace de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculez le déterminant de la matrice identité I_n de taille n par n en partant de la définitions formelle du déterminant.
3. Calculez le déterminant de la matrice $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en partant de la définitions formelle du déterminant.
4. Soit P une matrice inversible de taille $m \times m$, Q une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que $\det(P^{-1}AP) = \det(Q^T AQ) = \det(A)$ et que $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(Q^T AQ) = \mathrm{Tr}(A)$.
5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. En utilisant la décomposition de Jordan, calculez la trace et le déterminant de A en fonction de ses valeurs propres.

Exercice 16 Polynôme caractéristique. ($\star$)

1. Calculez le polynôme caractéristique de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Vérifiez que le théorème de Cayley-Hamilton est vérifié dans le cadre de cet exemple.
3. Donnez le polynôme caractéristique d'une matrice de taille 2×2 quelconque en fonction de la trace et du déterminant de la matrice.
4. Montrez que le polynôme caractéristique est invariant au changement de système de coordonnées.
5. Soit A une matrice de taille $m \times m$. Montrez que les racines du polynôme caractéristique de A sont les valeurs propres de A avec leur multiplicité. Commencez par considérer le cas où A est diagonale, puis le cas où A est diagonalisable, puis le cas général.

Exercice 17 Ensembles de matrices. ($\star$)

1. Montrez que l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ des matrices à coefficients réels de taille m par n muni de l'addition et du produit scalaire usuel est un espace vectoriel.
2. Montrez que la dimension de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ est mn, par exemple en proposant une base canonique.

Exercice 18 Diagonalisation. ($\star$)

On considère la matrice
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner les valeurs propres de A.
3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.
4. Donner une diagonalisation de A.
5. Calculer l'inverse de A.
6. Calculer l'exponentielle de A.

3 Optimisation

Exercice 19 Calcul différentiel. ($\star$)

1. Calculez les dérivées partielles par rapport à x et à y de la fonction $f : x, y \mapsto x^2 y$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.
2. Utilisez la règle donnant le Jacobien d'une fonction composée pour calculer le gradient de la fonction $x \mapsto \|x\|_2$ de de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$.
3. Calculez la Hessienne de la fonction $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.
4. Soit M une matrice à coefficients réels de taille n par n. Calculez la Hessienne de la fonction $g_M : x \mapsto x^T M x$ de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$.

Exercice 20 Optimisation. ($\star$)

1. Considerons $f : x \mapsto \sin(x)$ de $[0, \pi]$ vers $\mathbf{R}$. On admet que comme f est définie sur un intervalle fermé borné et continue sur cet intervalle, elle admet un minimum global (cf. théorème de Weierstrass en analyse réelle `https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_valeurs_extr%C3%AAmes`). Trouver le minimum global de f en utilisant la condition nécessaire d'existence de minimum global.
2. Montrez que la fonction $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ admet un unique minimum global et identifiez ce minimum.
3. Prouvez que la fonction $f : x_1, x_2 \mapsto x_1^2 - 36x_1 - 36x_2 + x_2^2 + 150$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ admet un minimum global.