	Master 2 informatique
Aix-Marseille université	Parcours IAAA, UE MIA
	Feuille d'exercices numéro 1
Année 2023-24	Preuves et algèbre linéaire.

1 Preuves

Exercice 1 Motifs de preuves basiques. ($\star$)

Pour chacune des propositions suivantes, déterminez si la proposition est vraie ou fausse et donnez en une preuve. Dans chaque cas, indiquez le ou les motif(s) de preuve utilisé (preuve simple, disjonction des cas, récurrence, raisonnement par l'absurde, contraposition ou contre-exemple).

1. La somme de deux nombres entiers impairs est paire.
2. Pour tout nombre entier n, $n^2 + n$ est pair.
3. Pour tout entier naturel n, $2^{3n+1} + 5$ est un multiple de 7.
4. Tous les nombres premiers sont impairs.
5. Si a un nombre rationnel et b un nombre irrationel, alors $a + b$ est irrationel.
6. Pour tout entier n, $n^2 + n^3 + n^4 + 2$ est pair, implique que n est pair.

Solution : La proposition est vraie. Nous allons le démontrer par contraposition.

Notons :

$$\mathcal{P}(n) : n^2 + n^3 + n^4 + 2 \text{ est pair.}$$

Et :

$$\mathcal{Q}(n) : n \text{ est pair.}$$

On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n)$, ce qui est équivalent à : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\neg\mathcal{Q}(n) \Rightarrow \neg\mathcal{P}(n)$, c'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n est impair $\Rightarrow n^2 + n^3 + n^4 + 2$ est impair.

Or si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2q_1 + 1$ avec $q_1 := 2k^2 + 2k$. De plus, $n^3 = 8k^3 + 8k^2 + 2k + 4k^2 + 4k + 1 = 2q_2 + 1$ avec $q_2 := 4k^3 + 6k^2 + 3k$. Et, $n^4 = 16k^4 + 24k^3 + 12k^2 + 2k + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2q_3 + 1$ avec $q_3 := 8k^4 + 16k^3 + 12k^2 + 4k$. Donc $n^2 + n^3 + n^4 + 2 = 2(q_1 + q_2 + q_3 + 2) + 1$ est impair.

On a donc bien que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n)$.

Exercice 2 Composition hiérarchique de motifs de preuves basiques. ($\star$)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

— $u_0 = a \in [0,1]$

— pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}\min(u_n, 1-u_n)$

Montrez que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 1$. Votre preuve devra contenir un raisonnement par récurrence et une disjonction des cas.

Exercice 3 Quelques motifs de preuves communs. ($\star$)

1. Décrivez deux motifs de preuves communs pour démontrer une équivalence ($P \Leftrightarrow Q$).
2. Théorie des ensembles. Décrivez un motif de preuve commun pour démontrer que deux ensembles sont égaux.
3. Algèbre linéaire. Décrivez un motif de preuve commun pour démontrer qu'une fonction est linéaire.

Exercice 4 Language logico-mathématique. ($\star$)

Donnez la négation de la proposition $\forall x, \exists y, P(x,y)$.

2 Concepts de base en algèbre linéaire

Exercice 5 Fonction linéaire. ($\star$)

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ x, y & \mapsto & x+y, x-y \end{array} \right.$$

Montrez que f est linéaire.

Exercice 6 Espaces vectoriels fonctionnels. ($\star\star$)

1. Proposez une notion d'addition et de produit scalaire naturelle sur l'espace $C^0([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$
2. Prouvez que les notions d'addition et de produit scalaire proposées munissent bien de $C^0([a,b],\mathbf{R})$ d'une structure d'espace vectoriel.
3. On considère la fonction e_x qui évalue une fonction continue en un point $x \in \mathbf{R}$:

$$e_x : \left| \begin{array}{ccc} C^0([a,b],\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Prouvez que e_x est linéaire.

Exercice 7 Notions élémentaires. ($\star$)

1. Décrivez en language naturel l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,1,0)$ et $(3,3,0)$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelle est la dimension de cet espace ?
3. Les vecteurs $(3,2)$ et $(6,4)$ de $\mathbf{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants ?
4. Qu'en est-il des vecteurs $(3,2,1)$ et $(6,4,0)$ de $\mathbf{R}^3$?
5. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle libre ?
6. Est-ce que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$?
7. Est-ce que de $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?
8. Démontrer par l'absurde le théorème sur la dimension d'un espace vectoriel vu en cours.

Exercice 8 Représentation matricielle des applications linéaires. ($\star$)

1. Donnez la matrice de l'application $f : x, y \mapsto y, 3x + y$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Utilisez cette matrice pour trouver $f(6, 17)$.
3. A l'aide d'un produit matriciel, obtenez la matrice de la composée de f avec $g : x, y \mapsto x+y$.
4. Même question pour la composée de f avec $h_y : x \mapsto x + y$.

Exercice 9 Changement de système de coordonnées. ($\star$)

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.

Solution : $\mathbb{R}^2$ est un ($\mathbb{R}$-)espace vectoriel de dimension 2 et B est une famille de 2 éléments de $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de montrer que B est une famille libre, c'est à dire que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda_1 (3e_1 - 2e_2) + \lambda_2 (e_1 + e_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Soient λ_1, λ_2 deux nombres réels. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (3e_1 - 2e_2) + \lambda_2 (e_1 + e_2) = 0 &\Leftrightarrow (3\lambda_1 + \lambda_2) e_1 + (\lambda_2 - 2\lambda_1) e_2 = 0 && (1)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases} && (2)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -3\lambda_1 \\ -5\lambda_1 = 0 \end{cases} && (3)\\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, && (4)
\end{aligned}$$

où en (1) on a utilisé les propriétés élémentaires des opérations sur un espace vectoriel, en (2) on a utilisé le fait que $(e_1,\, e_2)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$, est une base et en (3) et (4) on a effectué des manipulations élémentaires sur un système d'équations dont les inconnues sont des nombres réels.

2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, alors $P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.

Solution : Notons $a_1 := 3e_1 - 2e_2$ et $a_2 := e_1 + e_2$. Comme nous l'avons montré en cours, la matrice de changement de base $P = (p_{i,j})_{1\leq i\leq 2, 1\leq j\leq 2}$ retournant les coordonnées d'un vecteur dans la base (a_1, a_2) quand on l'applique aux coordonnées de ce vecteur dans la base (e_1, e_2) est telle que $\begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \end{pmatrix}$ sont respectivement les coordonnées de e_1 et de e_2 dans la base (a_1, a_2).

Or :

$$\begin{cases} a_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ a_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 5e_1 \\ a_2 = e_1 + e_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \\ e_2 = a_2 - \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \end{cases} \tag{5}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \\ e_2 = \frac{1}{5}[-a_1 + 3a_2] \end{cases}$$

Donc :

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B.

Solution : Les coordonnées de v dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc ses coordonnées dans la base B sont $P\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 Représentation matricielles d'opérations linéaires sur les polynômes. ($\star\star$)

On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto & f(P) = (a_2 + a_0)X^3 + a_1X^2 + a_0 \end{array} \right.$$

et les bases canoniques $V = (1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ et $W = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

1. Montrez que f est linéaire.
2. Donnez la matrice $M(f, V, W)$.
3. A l'aide de cette matrice, évaluez $f(X^2 - 3X + 1)$

Exercice 11 Différentes visions des opérations matricielles. ($\star$)

1. Écrire le produit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;

   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.

2. Écrire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   (a) comme deux produits matrice-vecteur ;

   (b) comme deux produits vecteur-matrice ;

   (c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;

   (d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Solution :

1. (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T c \\ b^T c \end{pmatrix},$$

   où : $a := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ et $c := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

2. Notons C le produit matriciel considéré dans cette question.

   (a) On a :

$$C = \begin{pmatrix} Ab & Ac \end{pmatrix},$$

   où : $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $c := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$.

   (b) On a aussi :

$$C = \begin{pmatrix} bA \\ cA \end{pmatrix},$$

   où : $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $c := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution :

2. (c) On a également :

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Et finalement :

$$C = \begin{pmatrix} a^T c & a^T d \\ b^T c & b^T d \end{pmatrix},$$

où : $a := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T$, $b := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$, $c := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $d := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Exercice 12 Matrix product with diagonal matrix. ($\star$)

On note $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la matrice $\begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{bmatrix}$ with all the off-diagonal coefficients equal to zero.

1. Express the matrix product $A\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in terms of the columns of A and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
2. Express the matrix product $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)B$ in terms of the lines of B and the diagonal coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Exercice 13 Matrices nilpotentes. ($\star\star$)

Soit N une matrice nilpotente de taille n par n (c'est à dire qu'il existe un entier p strictement positif, tel que $N^p = 0$). On définit $q := \inf\{r \mid N^r = 0, r \in \mathbf{N}, r > 0\}$ l'indice de nilpotence de N.

1. Montrer que $q \leq n$. Indice : par un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il existe une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ est une famille libre et conclure.

Solution :

Supposons que pour toute matrice colonne x_0 de taille n, $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ soit une famille liée. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe alors $(\alpha_i)_{i=0}^{q-1} \neq 0$ (où 0 représente un vecteur de n zéros), tel que :

$$\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i N^i x_0 = 0.$$

Notons $i_0 = \min\{i \mid 0 \leq i \leq q-1,\ \alpha_i \neq 0\}$. On a donc :

$$\sum_{i=i_0}^{q-1} \alpha_i N^i x_0 = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i N^i x_0 = 0,$$

avec $\alpha_{i_0} \neq 0$.

En multipliant à gauche par N^{q-1-i_0}, on obtient :

$$\sum_{i=i_0}^{q-1} \alpha_i N^{i+q-1-i_0} x_0 = N^{q-1-i_0} 0 = 0.$$

Par définition de q, pour tout $k \geq q$, $N^k x_0 = 0x_0 = 0$. On en déduit que :

$$\sum_{i=i_0}^{q-1} \alpha_i N^{i+q-1-i_0} x_0 = \alpha_{i_0} N^{q-1} x_0 = 0.$$

Solution : (continuée)

Et comme $\alpha_{i_0} \neq 0$, on obtient

$$N^{q-1} x_0 = 0.$$

On a donc obtenu pour tout x_0,

$$N^{q-1} x_0 = 0.$$

On en déduit que $N^{q-1} = 0$, ce qui est une contradiction avec la définition de q.

Il existe donc une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, \ldots, N^{q-1}x_0)$ est une famille libre de q vecteurs de $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ étant un espace vectoriel de dimension n, on a $q \leq n$.

2. Soit A et B deux matrices de taille n par n qui commutent (c'est à dire qu'on a $AB = BA$) et soit k un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer l'identité remarquable :

$$A^k - B^k = (A - B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B^i\right).$$

Solution : On peut le montrer par exemple par récurrence.

— Cas de base. Pour $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned}(A-B)\left(\sum_{i=0}^{2-1} A^{2-1-i}B^i\right) &= (A-B)(A+B)\\ &= A^2 - BA + AB - B^2\\ &= A^2 - AB + AB - B^2\\ &= A^2 - B^2.\end{aligned}$$

— Propagation. Supposons que :

$$A^k - B^k = (A-B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right).$$

On a que : $A(A^k - B^k) + (A^k - B^k)B = A^{k+1} - AB^k + A^kB - B^{k+1}$.

Par conséquent : $A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A^k - B^k)B + AB^k - A^kB$.

Solution : (continuée)

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la commutativité de A et B, qui implique celle de A^i et B^j pour tous entiers naturels i et j, on en déduit que :

$$\begin{aligned}A^{k+1} - B^{k+1} &= A(A-B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right) + (A-B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right)B + AB^k - A^kB\\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(A^{k+1-i}B^i - A^{k-i}B^{i+1} + A^{k-i}B^{i+1} - A^{k-1-i}B^{i+2}\right)\right) + AB^k - A^kB\\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(A^{k+1-i}B^i - A^{k-1-i}B^{i+2}\right)\right) + AB^k - A^kB\\ &= A\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i}B^i\right) + AB^k - B\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^{i+1}\right) - A^kB\\ &= A\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i}B^i\right) + AB^k - B\left(\sum_{i=1}^{k} A^{k-i}B^i\right) - A^kB\\ &= A\left(\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i\right) - B\left(\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i\right)\\ &= (A-B)\left(\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i\right).\end{aligned}$$

3. À l'aide d'un choix judicieux de A, B et k, montrer que $I - N$ est inversible et donner son inverse.

Solution : En prenant $A := I$, $B := N$ et $k := q$, A et B commutent car $IN = N = NI$, et on obtient donc que :

$$I^q - N^q = (I - N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} I^{q-1-i} N^i\right).$$

D'où :

$$I = (I - N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right).$$

De plus :

$$\begin{aligned}(I - N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right) &= \sum_{i=0}^{q-1} N^i - \sum_{i=0}^{q-1} N^{i+1} \\ &= (\sum_{i=0}^{q-1} N^i)I - (\sum_{i=0}^{q-1} N^i)N \\ &= \left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right)(I - N).\end{aligned}$$

Solution : (continuée)

Au final :

$$I = (I - N)\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right)(I - N),$$

et $I - N$ est donc inversible, d'inverse $\left(\sum_{i=0}^{q-1} N^i\right)$.

4. Soit a un nombre réel. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice de taille n par n :

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

Si $a = 0$, $M_a = I$ et M_a est donc inversible d'inverse I. Considérons maintenant le cas $a \neq 0$.

On a $M_a = I = N_a$, où

$$N_a := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons les puissances N_a^r de N_a pour r entier positif et montrons que N_a est nilpotente.

On peut décrire N_a de manière équivalente comme la matrice $(n_{a,i,j})$ avec pour tout $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $n_{a,i,j} = a\delta_{i+1,j}$, où pour tous entiers s, t, $d_{st} = 1$ si et seulement si $s = t$ et $d_{st} = 0$ sinon.

En utilisant cette caractérisation et la formule terme à terme pour le produit matriciel ($c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ pour un produit matriciel $C = AB$), on montre facilement par récurrence que pour tout entier positif r, $N_a^r = (n_{r,a,i,j})$ avec $n_{r,a,i,j} = a^r \delta_{i+r,j}$.

On en déduit que N_a est nilpotente d'ordre n.

Solution : (continuée)

En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient finalement que M_a est inversible d'inverse :

$$M_a^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} N_a^i,$$

c'est à dire que :

$$M_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$