Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Année 2023-24

Exercices #1 : preuves et algèbre linéaire

1 Preuves

Exercice 1 Motifs de preuves basiques. ($\star$)

Pour chacune des propositions suivantes, déterminez si la proposition est vraie ou fausse et donnez en une preuve. Dans chaque cas, indiquez le ou les motif(s) de preuve utilisé (preuve simple, disjonction des cas, récurrence, raisonnement par l'absurde, contraposition ou contre-exemple).

1. La somme de deux nombres entiers impairs est paire.
2. Pour tout nombre entier n, $n^2 + n$ est pair.
3. Pour tout entier naturel n, $2^{3n+1} + 5$ est un multiple de 7.
4. Tous les nombres premiers sont impairs.
5. Si a un nombre rationnel et b un nombre irrationel, alors $a + b$ est irrationel.
6. Pour tout entier n, $n^2 + n^3 + n^4 + 2$ est pair, implique que n est pair.

Exercice 2 Composition hiérarchique de motifs de preuves basiques. ($\star$)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

— $u_0 = a \in [0, 1]$

— pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}\min(u_n, 1 - u_n)$

Montrez que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 1$. Votre preuve devra contenir un raisonnement par récurrence et une disjonction des cas.

Exercice 3 Quelques motifs de preuves communs. ($\star$)

1. Décrivez deux motifs de preuves communs pour démontrer une équivalence ($P \Leftrightarrow Q$).
2. Théorie des ensembles. Décrivez un motif de preuve commun pour démontrer que deux ensembles sont égaux.
3. Algèbre linéaire. Décrivez un motif de preuve commun pour démontrer qu'une fonction est linéaire.

Exercice 4 Language logico-mathématique. ($\star$)

Donnez la négation de la proposition $\forall x, \exists y, P(x, y)$.

2 Algèbre linéaire

Exercice 5 Fonction linéaire. ($\star$)

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ x, y & \mapsto & x+y, x-y \end{array} \right.$$

Montrez que f est linéaire.

Exercice 6 Espaces vectoriels fonctionnels. ($\star\star$)

1. Proposez une notion d'addition et de produit scalaire naturelle sur l'espace $C^0([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$
2. Prouvez que les notions d'addition et de produit scalaire proposées munissent bien de $C^0([a,b],\mathbf{R})$ d'une structure d'espace vectoriel.
3. On considère la fonction e_x qui évalue une fonction continue en un point $x \in \mathbf{R}$:

$$e_x : \left| \begin{array}{ccc} C^0([a,b],\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

   Prouvez que e_x est linéaire.

Exercice 7 Notions élémentaires. ($\star$)

1. Décrivez en language naturel l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,1,0)$ et $(3,3,0)$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelle est la dimension de cet espace ?
3. Les vecteurs $(3,2)$ et $(6,4)$ de $\mathbf{R}^2$ sont-ils linéairement indépendants ?
4. Qu'en est-il des vecteurs $(3,2,1)$ et $(6,4,0)$ de $\mathbf{R}^3$?
5. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. La famille (e_1,e_2,e_3) est-elle libre ?
6. Est-ce que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$?
7. Est-ce que de $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?
8. Démontrer par l'absurde le théorème sur la dimension d'un espace vectoriel vu en cours.

Exercice 8 Représentation matricielle des applications linéaires. ($\star$)

1. Donnez la matrice de l'application $f : x, y \mapsto y, 3x + y$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Utilisez cette matrice pour trouver $f(6, 17)$.
3. A l'aide d'un produit matriciel, obtenez la matrice de la composée de f avec $g : x, y \mapsto x+y$.
4. Même question pour la composée de f avec $h_y : x \mapsto x + y$.

Exercice 9 Bases. ($\star$)

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1e_1 + v_2e_2$, alors $P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.
3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B.

Exercice 10 Représentation matricielles d'opérations linéaires sur les polynômes. ($\star\star$)

On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto & f(P) = (a_2 + a_0)X^3 + a_1X^2 + a_0 \end{array} \right.$$

et les bases canoniques $V = (1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ et $W = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

1. Montrez que f est linéaire.
2. Donnez la matrice $M(f, V, W)$.
3. A l'aide de cette matrice, évaluez $f(X^2 - 3X + 1)$

Exercice 11 Différentes visions des opérations matricielles. ($\star$)

1. Écrire le produit :
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;
   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.
2. Écrire le produit matriciel :
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

(a) comme deux produits matrice-vecteur ;

(b) comme deux produits vecteur-matrice ;

(c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;

(d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Exercice 12 Matrices nilpotentes. ($\star\star$)

Soit N une matrice nilpotente de taille n par n (c'est à dire qu'il existe un entier p strictement positif, tel que $N^p = 0$). On définit $q := \inf\{r \mid N^r = 0, r \in \mathbf{N}, r > 0\}$ l'indice de nilpotence de N.

1. Montrer que $q \leq n$. Indice : par un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il existe une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ est une famille libre et conclure.
2. Soit A et B deux matrices de taille n par n qui commutent (c'est à dire qu'on a $AB = BA$) et soit k un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer l'identité remarquable :
$$A^k - B^k = (A - B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right).$$
3. À l'aide d'un choix judicieux de A, B et k, montrer que $I - N$ est inversible et donner son inverse.
4. Soit a un nombre réel. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice de taille n par n :
$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 Polynômes orthogonaux. ($\star\star$)

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif d et des nombres réels a_0, a_1, $\dots$, a_d, tels que
$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.

2. Montrer que :

$$(.\,|\,.) : \left|\begin{array}{lcl} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array}\right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

3. (Bonus) Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(.\,|\,.)$ et telle que pour tout entier positif n, le degré de P_n est n et le coefficient d'ordre n de P_n est strictement positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.

4. (Bonus) Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$?

5. (Bonus) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (a_n X + b_n)P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X),$$

pour des suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (c_n) qu'on explicitera.