Matrices

Laurent Vouriot

September 23, 2022

Séance 2, matrices

Les Matrices

Les matrices sont des tableaux d'éléments qui servent à interpréter en termes calculatoires, et donc opérationnels, les résultats théoriques, entre autres, de l'algèbre linéaire.

- Multpliplication matrice/vecteur :
  Une matrice multipliée par un vecteur donne toujours un vecteur. On fait la multiplication dans cet ordre car le produit des matrices n'est pas commutatif.

  Pour une matrice M tel que : $M = (M_{i,j})\ \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{matrix}$
  et v un vecteur tel que $v = (v_i),\ 1 \leq i \leq m$
  La p-ième valeur du vecteur est donnée par $\sum_{k=1}^{a} a_{pk} x_k$

- Multiplication matrice/matrice :
  $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ et\ B \in \mathbb{R}^{n \times l}$
  $C = AB = (C_{i,j}), \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l \end{matrix}$
  $\forall i, j : C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$

Utilité des matrices

En algèbre linéaire une matrice permet de représenter les fonctions linéaires en dimensions finie de manière simple à appréhender et pratique pour les calculs.

Formellement la matrice d'une application linéaire dans des bases est definie par :
Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in N^*$ de base B_F. Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle ***matrice de l'application f dans les bases*** *B_E* ***et*** *B_F, notée $M(f, E, F)$, la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base B_f.*

Matrice d'une fonction linéaire, exemple

On a : $\begin{array}{c} V = (1, X, X^2) \text{ base de } \mathbb{R}_2[X] \\ W = (1, X, X^2, X^3) \text{ base de } \mathbb{R}_3[X] \end{array}$

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 & \longmapsto & f(P) = (a_2 + a_0)X^3 + a_1X^2 + a_0 \end{array} \right.$$

On veut trouver la matrice $M = (f, V, W)$.

Pour remplir la matrice M on calcule l'image de chaque vecteur $f(v_i)$. Décomposition de $v1, v2$ et $v3$ dans V :

$$[1]_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [X]_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [X^2]_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} v_1 = 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 = 1 & v_2 = 0 + 1 * X + 0 \times X^2 = X & v_3 = 0 + 0 \times X + 1 \times X^2 = X^2 \\ f(v_1) = X^3 + 1 & f(v_2) = X^2 & f(v_3) = X^3 \end{array}$$

maintenant on veut trouver les coefficients de décomposition de $f(v_i)$ dans W.

$$[f(v_1)]_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(v_2)]_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f(v_3)]_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a donc : $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemple de changement de base

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ trouver la matrice de passage de la base canonique $B = ((1, 0), (0, 1))$ à la base $C = ((1, 1), (-1, 1))$ soit $P(B, C) = M(I, B, C)$.

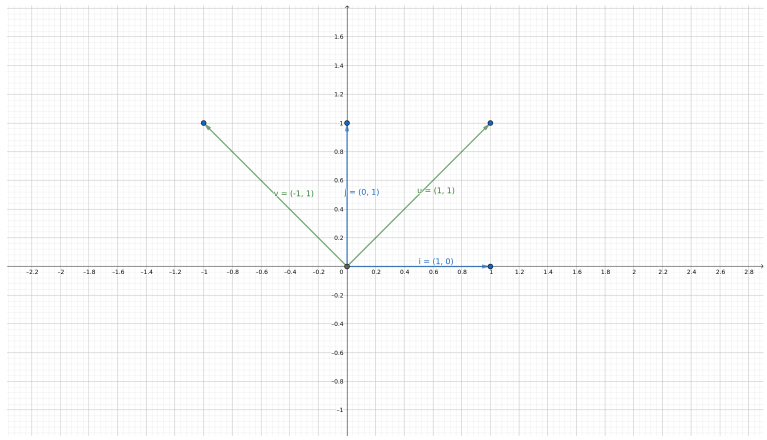

Figure 1: Illustration géometrique du changement de base P(B,C)

on va donc résoudre : $v_i = aw_i + bw_i$

i.e $\quad \begin{array}{l} (1,0) = a(1,1) + b(-1,1) \\ (0,1) = a(1,1) + b(-1,1) \end{array}$

on obtient : $\quad \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \\ v_2 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \end{array}$

La matrice de changement de base est donc : $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Propriétés du produit matriciel

- Associativité du produit matriciel :
  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

- Distributivité du produit matriciel :
  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
  $(A + B)C = A \times C + B \times C$
  $c(A \times B) = (cA) \times B = A \times (cB)$

Transposée

La transposée d'une matrice s'obtient par symétrie axiale par rapport à sa diagonale, i.e on échange les lignes et les colonnes de A.

Les propriétés de la transposée :
$(A + B)^T = A^T + B^T$
$(A)^T = \alpha A^T (AB)^T = B^T A^T$

Matrice par bloc

On appelle matrice par blocs une matrice divisée en blocs à partir d'un groupement quelconque de termes contigus de sa diagonale.
Opertations sur les matrices par blocs : $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$

$$P + Q = \begin{bmatrix} P_{11} + Q_{11} & P_{12} + Q_{12} \\ P_{21} + Q_{21} & P_{22} + Q_{22} \end{bmatrix}$$

$$PQ = \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} + P_{12}Q_{21} & P_{11}Q_{12} + P_{12}Q_{22} \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Angle et orthogonalité

rappel *Dans un espace vectorielle réél, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.*
aussi $\mathbb{R}^n (v|w) = v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

erratum slide 22: Vecteur orthogonaux $\Leftrightarrow (v|\mathbf{w} = 0)$

Théorème : Une famille de vecteurs orthogonaux est libre

Pour construir une famille orthonormale (i.e un famille orthogonale telle que la norme de tous ses vecteurs vaut 1) on utilise la procédure de Gram-Schmidt. Basée sur le théorème de l'Orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E et $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre dans E. Alors, il existe une famille orthonormale $(x, \cdots, x_p)$ de E telle que :
$\forall k \in [\![1, p]\!], Vect(x_1, \cdots, x_k) = Vect(e_1, \cdots, e_k)$

De plus on peut construir par récurrence $(x_1, \cdots, x_p)$ de sorte que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$x_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$ avec $y_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, x_i \rangle x_i$ (c'est une généralisation de la procedure qu'il y a dans les slides.)

Décomposition en valeurs singulières

matrice orthogonale : une matrice orthogonale est une matrice carrée à coefficients réels, où les colonnes et les et les lignes sont des vecteurs orthonormaux. On peut exprimer ça de cette manière :

$QQ^T = I$
$Q^T Q = I$
$Q^{-1} = Q^T$

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice est un outil de factorisation de matrices rectangulaires réelles ou complexes.

Pour la décomposition en valeurs singulière d'une matrice $A_{m\times n}$ on pose les matrices suivantes :

- $U_{m\times m}$ une matrice unitaire

- $\Sigma_{m\times n}$, telle que $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\} \in (\mathbb{R}^{+*})^r$ avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, i.e une matrice dont les coefficients diagonaux sont des réels positifs ou nuls et tous les autres sont nuls.

- La matrice $V_{n\times n}$ des vecteurs propres.

Exemple de décomposition en valeurs singulière :

on a : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ une matrice 2×3 que l'on va décomposer $A = U\Sigma V^T$

de par les dimensions de A on a donc $U_{2\times 2}\ \Sigma_{2\times 3}\ V^T_{3\times 3}$.

On commence par calculer $B = A^T A$ qui va nous amener à trouver les vecteurs de V et puis à partir de V_1 et Σ on va trouver U.

Pour cela on doit trouver les valeurs et vecteurs propres de B car les vecteurs propres forment V, les valeurs propres $(\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_3)$.
Elles permettent de trouver Σ telle que $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$.
avec $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$. On rajoute une colonne de 0 pour que Σ ait les bonnes dimensions.

U contient u_1 et u_2 telle que $U_k = \frac{AV_k}{\sigma_k} \forall k \in 1, 2$, car

$$\begin{aligned} AV &= U\Sigma V^T V \\ &= U\Sigma \\ \text{donc } \frac{Av_1}{\sigma_1} &= u_1 \end{aligned}$$

on a donc $\lambda_1 = 2\ \lambda_2 = 1\ \lambda_3 = 0$, ce qui nous donne :
$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma 2 = 1$ donc $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
donc U $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc finalement on a comme décomposition :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$