# Mathématiques pour l'Intelligence Artificielle
# CM 1

Cyrille Siouffi

6 Septembre 2022

## Contents



## 1 Types de preuves mathématiques par l'exemple

La méthode commune pour la rédaction de preuves mathématiques se déroule comme suit:

1. On formalise les hypothèses du résultat qu'on veut prouver en :
   (a) présentant les définitions et axiomes qu'on souhaite utiliser
   (b) nommant les variables selon leur rôle dans la preuve
2. On présente le raisonnement en montrant que les hypothèses impliquent les résultats souhaités
   (a) On utilise uniquement les théorèmes connus
   (b) On s'appuie sur les axiomes du domaine
   (c) On utilise les règles du raisonnement logique

### 1.1 Preuve simple

**Preuve que la somme deux nombres impairs est paire**

Un nombre $n$ est impair $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1$
Un nombre $n$ est pair $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$
On établit :

$$\left|\begin{array}{lcl} n_1 & = & k_1 + 1 \\ n_2 & = & k_2 + 1 \end{array}\right. \\ \text{et} \\ \begin{array}{lcll} n_1 + n_2 & = & 2(k_1 + k_2 + 1) & \text{donc} \\ n_1 + n_2 & = & 2k & \text{avec } k = k_1 + k_2 + 1 \end{array} \tag{1}$$

Puisque $n_1 + n_2 = 2k$, $n_1 + n_2$ est pair

Figure 1: Preuve que la somme de deux nombres impairs est paire

## 1.2 Preuve par disjonction des cas

### 1.2.1 Preuve que pour tout nombre entier $n$, $n^2 + n$ est pair

Soit $n \in \mathbb{N}$,

- Si $n$ est pair, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$
  alors $n^2 = 4k^2$ et

  $$\begin{aligned} n^2 + n &= 4k^2 + 2k \\ &= 2(2k^2 + 4) \\ &= \ \ 2q \quad \text{avec } q = 2k^2 + 4 \end{aligned} \tag{2}$$

  Donc $\exists q \in \mathbb{Z}, n^2 + n = 2q$, donc $n^2 + n$ est pair.

- Si $n$ est impair, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1$
  alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et

  $$\begin{aligned} n^2 + n &= 4k^2 + k + 2 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 2) \\ &= \ \ 2q \quad \text{avec } q = 2k^2 + 3k + 1 \end{aligned} \tag{3}$$

  Donc $\exists q \in \mathbb{Z}, n^2 + n = 2q$, donc $n^2 + n$ est pair.

Figure 2: Preuve que pour tout nombre entier $n$, $n^2 + n$ est pair

### 1.3 Preuve par récurrence

#### 1.3.1 Preuve que $2^{3n+1}+5$ est un multiple de 7

Montrer tout entier naturel $n$, $2^{3n+1}+5$ est un multiple de 7.

$P(n) = \exists k \in \mathbb{N}, 2^{3n+1}+5 = 7k$

- $P(0)$: $2^1+5 = 7k$, $k=1$
- Si $P(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 2^{3(n+1)+1}+5 \\ &= 2^{3n+4}+5 \\ &= (7k-5)2^3+5 \\ &= (56k-40)+5 \\ &= 56k-35 \\ &= 7(8k-5) \end{aligned} \tag{4}$$

On a donc bien $P(n+1) = 7k_{n+1}$, avec $k_{n+1} = 8k-5$ donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Figure 3: Preuve que $2^{3n+1}+5$ est un multiple de 7

### 1.4 Preuve par l'absurde

#### 1.4.1 Soit a un nombre rationnel et b un nombre irrationnel. Preuve que a + b est irrationnel.

Supposons que $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{Q} \iff \exists a, b \in \mathbb{Z} \Big| \frac{a}{b} = x$ alors
$\exists p_1, q_1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $a = \frac{p_1}{q_1}$ et $\exists p_2, q_2 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, a+b = \frac{p_2}{q_2}$
alors $a+b-a = \frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}$ donc $b = \frac{p_2 q_1 - p_2 q_2}{q_2 q_1}$, on a $q_2 q_1 \in \mathbb{N}^*$ et $q_2 q_1 - q_1 q_2 \in \mathbb{Z}$ donc $b \in \mathbb{Q}$.
<u>Contradiction</u>

Figure 4: Soit a un nombre rationnel et b un nombre irrationnel. Preuve que a + b est irrationnel.

### 1.5 Preuve par contraposition

#### 1.5.1 Preuve que si $n$ est un nombre entier et $n^2$ est impair, alors $n$ est impair

On veut prouver que le contraire de la proposition est vrai:

($n$ est pair $\implies$ $n^2$ est pair) $\implies$ $\neg$($n$ est pair $\implies$ $n^2$ est impair)

### 1.6 Rappels de raisonnement logique

Les preuves logiques :

- Peuvent être combinées pour constituer des preuves complexes
- Sont en nombre limités donc peuvent être éprouvées tour à tour
- Ont des méthodes typiques de certains domaines
  -
$$\begin{aligned} (P \iff Q) \implies &(P \iff k) \\ &(k \iff Q) \end{aligned} \tag{5}$$
  -
$$\begin{aligned} (E = F) \implies &(x \in E) \\ &(x \in F) \end{aligned} \tag{6}$$

# 2 Algèbre linéaire

## 2.1 Objets mathématiques

### 2.1.1 Fonctions

Une fonction est un objet mathématique qui prend une ou plusieurs variables en entrées $x_1, ..., x_n$ comprises dans un ensemble quelconque $E$, et produit un résultat $f(x_1, ..., x_n)$ compris dans un ensemble quelconque $F$.

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array} \right.$$

## 2.2 Espaces vectoriels

$$\begin{gathered} (E, K, +, .) \\ + : \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ x, y & \longrightarrow & x + y \end{array} \right. \\ . : \left| \begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ \alpha, x & \longrightarrow & \alpha.x \end{array} \right. \end{gathered} \tag{7}$$

est un espace vectoriel $\iff$ $K$ est un corps et les règles définies dans le cours d'associativité, commutativité, élément neutre, d'inverse, compatibilité, distributivité et d'identitité multiplicative, sont respectées (page 20 du cours 1).

### 2.2.1 Fonctions linéaires

Une fonction est dite **linéaire** $\iff$ $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels sur un même corps K et pour toute paire de scalaires $(\alpha, \beta) \in K^2$ et toute paire de vecteurs $(u, v) \in E^2$, $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Les fonctions linéaires sont les objets centraux de l'algèbre linéaire (conceptuellement), elles ont la particularité de préserver les combinaisons linéaires.

Prouvons que f est une fonction linéaire : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ et soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
Notons $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ alors :
$\alpha u + \beta v = (\alpha(u_1) + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2)$
donc :
$f(\alpha u + \beta v) = (\alpha u_1 + \beta v_1 + \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_1 + \beta v_1 - \alpha u_2 - \beta v_2)$
par ailleurs :
$\alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha(u_1 + u_2, u_1 - u_2) + \beta(v_1 + v_2, v_1 - v_2)$
Ainsi :
$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$
Nous avons prouvé que f est une fonction linéaire.

### 2.2.2 Matrices

Les matrices sont les objets centraux pour la pratique de l'algèbre linéaire. Il s'agit simplement d'un tableau de nombres en deux dimensions. Elles permettent de représenter les fonctions linéaires en dimensions finies de manièetre simple à appréhender pour les calculs.

**Matrice d'une fonction linéaire**

Soient $E$ et $F$, desespaces vectoriels de dimension finie
$V = (v_1, ..., v_p)$, base de $E$,
$W = (w_1, ..., w_n)$, base de $F$,
$f : E \longrightarrow F$, fonction linéaire
$M = M(f, V, W)$, matrice de $f$ de $V$ vers $W$.

$$M = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2p} \\ ... & & ... & a_{1j} & ... & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{ip} \\ ... & & ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{12} & ... & a_{nj} & ... & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow w_1 \\ \longleftarrow w_2 \\ \\ \longleftarrow w_i \\ \\ \longleftarrow w_n \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} f(v_1) & f(v_2) & & f(v_j) & & f(v_p) \end{array} & \end{array} \tag{8}$$