	Master 2 informatique Parcours IAAA, UE MIA
Année 2021-22	**Justification des règles de calcul matriciel.**

Considérons la règle de calcul du produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de taille m par n avec une matrice colonne $b = (b_j)$ de taille n par 1 :

$$Ab := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_j \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Cette règle peut sembler arbitraire a priori. Nous allons montrer qu'elle peut être déduite naturellement à partir de considérations sur les espaces vectoriels et applications linéaires sous-jacents. Le raisonnement que nous allons faire peut facilement être étendu pour donner une dérivation naturelle de la règle de calcul pour un produit matriciel général.

Considérons une application linéaire $f : E \to F$ entre un espace vectoriel E de dimension finie n et un espace vectoriel F de dimension finie m, ainsi qu'un vecteur $v \in E$. Choisissons une base $V := (v_1, \ldots, v_n)$ quelconque de E et une base $W := (w_1, \ldots, w_m)$ quelconque de F. Nous allons montrer que la règle usuelle de calcul matriciel donnée en Équation 1 est obtenue naturellement quand on cherche à calculer la matrice colonne :

$$y(f(v), W) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

donnant la décomposition de $f(v)$ sur W à partir de la matrice de f entre V et W :

$$M(f, V, W) := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \to & w_1 \\ & \vdots \\ \to & w_m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ f(v_1) & \ldots & f(v_n) \end{array} \end{array} \tag{3}$$

et de la matrice colonne :

$$b(v, V) := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

donnant la décomposition de v sur V.

Par définition de $M(f, V, W)$, pour $j = 1..n$, $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i$ est l'unique décomposition de $f(v_j)$ sur W. Par définition de $b(v, V)$, $\sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ est l'unique décomposition de v sur V. Par linéarité de f, nous avons donc :

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} b_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(b_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_j \right) w_i. \tag{5}$$

Pour $i = 1..n$, la i-ième composante de la décomposition de $f(v)$ sur W est donc $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_j$ et on obtient bien la règle de calcul donnée en Équation 1 pour calculer $y(f(v), W)$. Spécifiquement on a prouvé que :

$$y(f(v), W) = M(f, V, W) b(v, V). \tag{6}$$