Aix*Marseille université	MASTER 2 INFORMATIQUE PARCOURS IAAA, UE MIA
Année 2021-22	**SVD et espaces fondamentaux.**

Soit A une matrice réelle de taille m par n. On a vu qu'il existait alors une matrice orthogonale U de taille m par m, une matrice orthogonale V de taille n par n, un entier positif $r \leq \min(m,n)$, des réels $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ et une matrice de taille m par n,

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \begin{matrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r \end{matrix} & \mathbf{0}_{m,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

tels que, $A = U\Sigma V^T$.

Cette décomposition est appelée décomposition en valeurs singulières (SVD). Nous allons montrer dans cette note, que la décomposition en valeurs singulières nous informe immédiatement sur les espaces fondamentaux associés à A et sur leurs relations. Les espaces fondamentaux associés à A sont son noyau $\mathrm{Ker}(A) := \{v \in \mathbf{R^n} \mid Av = 0\}$, son image $\mathrm{Im}(A) := \{u \in \mathbf{R^m} \mid \text{ il existe } v \in \mathbf{R}^n,\ Av = u\}$, son co-noyau $\mathrm{Ker}(A^T)$ et sa co-image $\mathrm{Im}(A^T)$.

On peut déduire rapidement de la SVD que :

1. les r premières colonnes de U forment une base orthonormale de $\mathrm{Im}(A)$;
2. les $n-r$ dernières colonnes de V forment une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(A)$;
3. les $m-r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(A^T)$;
4. les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de $\mathrm{Im}(A^T)$.

On a comme corollaires immédiats—mais importants—que :

5. $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}(A^T) = r$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = n - r$ et $\dim \mathrm{Ker}(A^T) = m - r$;
6. $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^T)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathbf{R}^m$;
7. $\mathrm{Im}(A^T)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathbf{R}^n$.

Preuve. On montre uniquement les 4 premières propositions. Les corollaires sont immédiats.

1. U étant orthogonale, ces colonnes sont orthonormales. Il suffit donc de montrer que tout $u \in \mathrm{Im}(A)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des r premières colonnes de U et

réciproquement que toute combinaison linéaire des r premières colonnes de U appartient à $\mathrm{Im}(A)$.

Notons u_i la i-ième colonne de U. Soit $u \in \mathrm{Im}(A)$. Alors il existe $v \in \mathbf{R}^n,\ Av = u$. Notons $w := \Sigma V^T v$. Comme seules les r premières composantes de w peuvent être différentes de 0 (du fait de la multiplication par Σ), on a $Uw = \sum_{i=1}^r w_i u_i$. Or $Uw = U\Sigma V^T v = Av$, donc Av peut bien s'écrire comme une combinaison linéaire des r premières colonnes de U.

Réciproquement, soit r nombres réels $w_1, w_2, \ldots, w_r$ et soit $u := \sum_{i=1}^r w_i u_i$. Alors $u = Uw$, pour

$$w := \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \\ \mathbf{0}_{m-r} \end{bmatrix}.$$

On a alors $w = \Sigma x$, où :

$$x := \begin{bmatrix} w_1/\sigma_1 \\ w_2/\sigma_2 \\ \vdots \\ w_r/\sigma_r \\ \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix}$$

et, puisque V est orthogonale, on a que $v = Vx$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$, tel que $Av = U\Sigma V^T v = U\Sigma V^T V x = U\Sigma x = Uw = u$. Donc $u \in \mathrm{Im}(A)$.

2. Notons v_i la i-ième colonne de v. Soit $v \in \mathrm{Ker}(V)$. Alors $Av = U\Sigma V^T v = 0$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tel que $(V^T v)_i = w_i \neq 0$. Alors $(\Sigma V^T v)_i = \sigma_i w_i \neq 0$ et comme U est orthogonale et donc de rang plein, on en déduit que $(U\Sigma V^T v)_i = (Av)_i$ est différent de 0. On obtient une contradiction, donc $(V^T v)_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Par ailleurs, comme V est orthogonale, on a $v = VV^T v = V(V^T v) = \sum_{i=1}^n (V^T v)_i v_i$. On a donc au final que v peut s'écrire comme la combinaison linéaire $\sum_{i=r+1}^n (V^T v)_i v_i$ des $n - r$ dernières colonnes de V.

   Réciproquement, soit r nombres réels $w_1, w_2, \ldots, w_r$ et soit $v := \sum_{i=r+1}^n w_i v_i$. Alors, $Av = U\Sigma V^T v$. $(V^T v)_i = v_i^T v = v_i^T (\sum_{j=r+1}^n w_j v_j) = w_i$ si $i \geq r+1$ et 0 si $0 \leq i \leq r$, car V est orthogonale. D'où, $\Sigma V^T v = 0$ et donc $Av = U\Sigma V^T v = 0$ et $v \in \mathrm{Ker}(A)$.

3. On a $A^T = V\Sigma^T U^T$, et donc V, Σ^T et U^T donnent une décomposition en valeurs singulières

de A^T. On peut donc appliquer la proposition 2 pour obtenir que les $m-r$ dernières colonnes de U forment une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(A^T)$.

4. De la même façon que pour la proposition précédente, on peut appliquer la proposition 1 sur la décomposition $A^T = V\Sigma^T U^T$ pour obtenir que les r premières colonnes de V forment une base orthonormale de $Im(A)^T$.

$\square$