Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Année 2021-22 | **DM 1 : Algèbre Linéaire et Probabilités**

Exercice 1 Preuves. (Faisable après la première séance)

1. Prouver que pour tout entier n, $n^2 + n^3 + n^4 + 2$ est pair, implique que n est pair.
2. Quel type de raisonnement avez-vous utilisé ?

Exercice 2 Bases. (Faisable après la deuxième séance)

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Trouver la matrice de changement de base P telle que si $v = v_1e_1 + v_2e_2$, alors $P\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de v dans la base B.
3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base B.

Exercice 3 Différentes visions des opérations matricielles. (Faisable après la deuxième séance)

1. Écrire le produit :
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;
   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.
2. Écrire le produit matriciel :
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
   (a) comme deux produits matrice-vecteur ;
   (b) comme deux produits vecteur-matrice ;
   (c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;
   (d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

Exercice 4 Diagonalisation. (Faisable après la deuxième séance)

1. Calculer le polynôme caractéristique de :

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Donner les valeurs propres de A.

3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de A.

4. Donner une diagonalisation de A.

5. Calculer l'inverse de A.

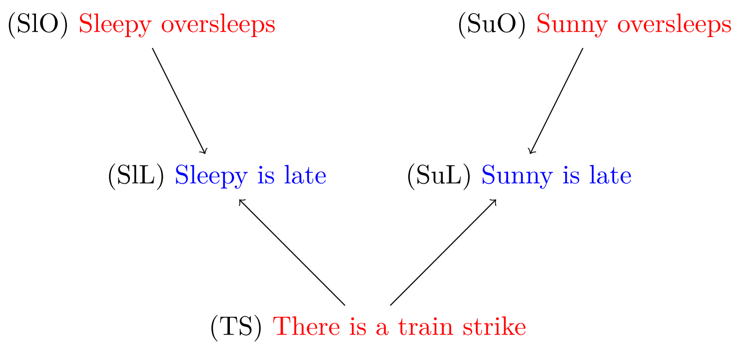
6. Calculer l'exponentielle de A.

Exercice 5 Éléments propres de $A^T A$ et AA^T. (Faisable après la deuxième séance)

1. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T en fonction des valeurs singulières de A.

2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres pour chacune de ces deux matrices en fonction des matrices orthogonales U et V apparaissant dans la décomposition en valeur singulières de A.

Exercice 6 Calcul probabiliste. (Faisable après la troisième séance)



Considérons le modèle graphique représenté ci-dessus. SlO, SuO, SlL, SuL and TS sont des variables aléatoire binaires prenant leurs valeurs dans $\{0, 1\}$. Dans cet exercice nous allons essayer de déterminer ce qui peut être inféré sur les variables latentes (en rouge) à partir de l'observation des variables observées (en bleu).

Nous faisons l'hypothèse que si au moins un des deux évènements "Sleepy oversleeps" et "There is a train strike" a lieu, alors 'Sleepy is late' a lieu également (avec probabilité 1). De façon similaire, si au moins un des deux évènements 'Sunny oversleeps' et 'There is a train strike' a lieu, alors

'Sunny is late' a lieu également (avec probabilité 1). Nous pouvons l'écrire plus formellement, de la manière suivante :

$$P(SlL = 1|SlO = a, TS = b) = a \vee b,$$

et :

$$P(SuL = 1|SuO = a, TS = b) = a \vee b,$$

pour tout a, b dans $\{0,1\}$. Le symbole $\vee$ représente le connecteur logique *ou* (inclusif) de $\{0,1\}$ vers $\{0,1\}$.

On note $l = P(SlO = 1)$, $u = P(SuO = 1)$ et $t = P(TS = 1)$.

1. Donner la factorisation de $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$ d'après le modèle graphique représenté ci-dessus.
2. La distribution de probabilité $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$ est-elle entièrement déterminée si les valeurs de l, u et t sont données ?
3. Calculer $P(TS = 1|SlL = 1)$ en fonction de l, u et t.
4. Calculer $P(SlO = 1|SlL = 1)$ en fonction de l, u et t.
5. Calculer $P(TS = 1|SlL = 1, SuL = 1)$ en fonction de l, u et t.
6. Calculer $P(SlO = 1|SlL = 1, SuL = 1)$ en fonction de l, u et t.
7. Supposer à présent que $l = 0.5$, $t = 0.1$ et que lévenement 'Sleepy is late' a lieu. Quel évènement est alors le plus probable : 'There is a train strike' ou 'Sleepy overslept' ?
8. Même question si on suppose en plus que $u = 0.01$ et que l'évènement 'Sunny is late' est également observé.
9. Que se passe-t-il si on prend $l = 0.5$, $t = 0.1$ et $u = 0.2$?

Exercice 7 Espérance et variance d'estimateurs classiques. (Faisable après la troisième séance)

Soit n un entier naturel et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires rélles mutuellement indépendantes. Par souci de simplicité, on suppose que tous les moments des ces variables aléatoires existent. On note

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

et

$$\hat{V} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2$$

1. Montrez que
$$\hat{V} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \hat{\mu}^2$$
2. Exprimez l'espérance de $\hat{\mu}$ comme une fonction des moments centrés des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (prouvez votre résultat)

On suppose à présent que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent toute la même distribution (elles sont donc i.i.d. puisqu'on a déjà supposé qu'elles étaient indépendantes).

3. Répondez à nouveau à la question précédente dans ce cadre plus simple.
4. Exprimez la variance de $\hat{\mu}$ comme une fonction des moments centrés des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (prouvez votre résultat)
5. Exprimez l'espérance de $\hat{V}$ comme une fonction des moments centrés des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (prouvez votre résultat)
6. (Bonus) Exprimez la variance de $\hat{V}$ comme une fonction des moments centrés des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (prouvez votre résultat)

Exercice 8 Matrices nilpotentes. (Faisable après la deuxième séance)

Soit N une matrice nilpotente de taille n par n (c'est à dire qu'il existe un entier p strictement positif, tel que $N^p = 0$). On définit $q := \inf\{r \mid N^r = 0, r \in \mathbf{N}, r > 0\}$ l'indice de nilpotence de N.

1. Montrer que $q \leq n$. Indice : par un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il existe une matrice colonne x_0 telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ..., N^{q-1}x_0)$ est une famille libre et conclure.
2. Soit A et B deux matrices de taille n par n qui commutent (c'est à dire qu'on a $AB = BA$) et soit k un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer l'identité remarquable :
$$A^k - B^k = (A - B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right).$$
3. À l'aide d'un choix judicieux de A, B et k, montrer que $I - N$ est inversible et donner son inverse.
4. Soit a un nombre réel. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice de taille n

par n :

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Polynômes orthogonaux. (Faisable après la deuxième séance)

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif d et des nombres réels a_0, a_1, ..., a_d, tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.

2. Montrer que :

$$(.\mid .) : \left| \begin{array}{lll} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

3. (Bonus) Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(.\mid .)$ et telle que pour tout entier positif n, le degré de P_n est n et le coefficient d'ordre n de P_n est strictement positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.

4. (Bonus) Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$?

5. (Bonus) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (a_n X + b_n)P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X),$$

pour des suites de nombres réels (a_n), (b_n) et (c_n) qu'on explicitera.

Exercice 10 (Bonus) Preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières. (Faisable après la deuxième séance)

1. Prouver que toute matrice semi-orthogonale de taille n par r, avec $r \leq n$, peut être complétée en une matrice orthogonale de taille n par n.

2. Soit A une matrice réelle de taille m par n. Montrer qu'il est possible de trouver une matrice colonne x de taille n et une matrice colonne y de taille m, telles que : $Ax = \sigma y$, $\|x\|_2 = 1$, $\|y\|_2 = 1$ et $\sigma = \|A\|_2$. Indice : utiliser l'une des deux définitions équivalentes de $\|A\|_2$.

3. En utilisant le résultat de la première question, x et y, montrer qu'il existe une matrice orthogonale U de taille m par m, une matrice orthogonale V de taille n par n, une matrice colonne w de taille $n-1$ et une matrice B de taille $m-1$ par $n-1$, telles que :

$$A_1 := U^T A V = \begin{pmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $\|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + w^T w$. Indice : multiplier A_1 par $(\sigma \; w^T)^T$.

5. Montrer que $\|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2$ et en déduire la valeur de w.

6. Utiliser un raisonnement par récurrence pour compléter la preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières.