Master 2 informatique

Parcours IAAA, UE MIA

Année 2021-22

**DM 1 : algèbre linéaire**

**Exercice 1** Bases.

1. Montrer que $B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Trouver la matrice de changement de base $P$ telle que si $v = v_1e_1 + v_2e_2$, alors $P\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donne les coordonnées de $v$ dans la base $B$.
3. Calculer les coordonnées de $v = -e_1 + e_2$ dans la base $B$.

**Exercice 2** Différentes visions des opérations matricielles.

1. Écrire le produit :
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   (a) comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche ;
   (b) comme une matrice contenant deux produits scalaires.
2. Écrire le produit matriciel :
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
   (a) comme deux produits matrice-vecteur ;
   (b) comme deux produits vecteur-matrice ;
   (c) comme une somme de 3 matrices de rang 1 ;
   (d) comme une matrice contenant quatre produits scalaires.

**Exercice 3** Diagonalisation.

1. Calculer le polynôme caractéristique de :
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Donner les valeurs propres de $A$.

3. Trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre de $A$.

4. Donner une diagonalisation de $A$.

5. Calculer l'inverse de $A$.

6. Calculer l'exponentielle de $A$.

**Exercice 4** Éléments propres de $A^T A$ et $AA^T$.

1. Soit $A$ une matrice réelle de taille $m$ par $n$. Décrire les valeurs propres de $A^T A$ et de $AA^T$ en fonction des valeurs singulières de $A$.

2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres pour chacune de ces deux matrices en fonction des matrices orthogonales $U$ et $V$ apparaissant dans la décomposition en valeur singulières de $A$.

**Exercice 5** Matrices nilpotentes.

Soit $N$ une matrice nilpotente de taille $n$ par $n$ (c'est à dire qu'il existe un entier $p$ strictement positif, tel que $N^p = 0$). On définit $q := \inf\{r \mid N^r = 0, r \in \mathbf{N}, r > 0\}$ l'indice de nilpotence de $N$.

1. Montrer que $q \leq n$. Indice : par un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il existe une matrice colonne $x_0$ telle que $(x_0, Nx_0, N^2x_0, ...N^{q-1}x_0)$ est une famille libre et conclure.

2. Soit $A$ et $B$ deux matrices de taille $n$ par $n$ qui commutent (c'est à dire qu'on a $AB = BA$) et soit $k$ un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer l'identité remarquable :

$$A^k - B^k = (A - B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B^i\right).$$

3. À l'aide d'un choix judicieux de $A$, $B$ et $k$, montrer que $I - N$ est inversible et donner son inverse.

4. Soit $a$ un nombre réel. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice de taille $n$ par $n$ :

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6** Polynômes orthogonaux.

On considère l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes a coefficients réels. Pour rappel, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe un entier positif $d$ et des nombres réels $a_0$, $a_1$, ..., $a_d$, tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

1. Définir des notions naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire pour les polynômes et montrer que ces opérations permettent de munir $\mathbf{R}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel.

2. Montrer que :

$$(.\mid .) : \left| \begin{array}{lll} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P, Q & \mapsto & \int_0^1 P(x)Q(x)dx \end{array} \right.$$

   définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

3. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$, orthonormale pour $(. \mid .)$ et telle que pour tout entier positif $n$, le degré de $P_n$ est $n$ et le coefficient d'ordre $n$ de $P_n$ est positif. Indice : adapter le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit en cours à ce cas de figure.

4. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}[X]$ ?

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ :

$$P_n(X) = (a_n X + b_n)P_{n-1}(X) + c_n P_{n-2}(X),$$

   pour des suites de nombres réels $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ qu'on explicitera.

**Exercice 7** Preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières.

1. Prouver que toute matrice semi-orthogonale de taille $n$ par $r$, avec $r \leq n$, peut être complétée en une matrice orthogonale de taille $n$ par $n$.

2. Soit $A$ une matrice réelle de taille $m$ par $n$. Montrer qu'il est possible de trouver une matrice colonne $x$ de taille $n$ et une matrice colonne $y$ de taille $m$, telles que : $Ax = \sigma y$, $\|x\|_2 = 1$, $\|y\|_2 = 1$ et $\sigma = \|A\|_2$. Indice : utiliser l'une des deux définitions équivalentes de $\|A\|_2$.

3. En utilisant le résultat de la première question, $x$ et $y$, montrer qu'il existe une matrice orthogonale $U$ de taille $m$ par $m$, une matrice orthogonale $V$ de taille $n$ par $n$, une matrice

colonne $w$ de taille $n-1$ et une matrice $B$ de taille $m-1$ par $n-1$, telles que :

$$A_1 := U^T A V = \begin{pmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $\|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + w^T w$. Indice : multiplier $A_1$ par $(\sigma \ w^T)^T$.
5. Montrer que $\|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2$ et en déduire la valeur de $w$.
6. Utiliser un raisonnement par récurrence pour compléter la preuve de l'existence de la décomposition en valeurs singulières.